Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

SS 2020

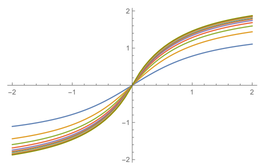
Funktionalanalysis

Übungsblatt 6

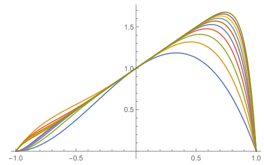
Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 07.06.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Folgen $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([-1,1])$ gegeben durch

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\arctan(jx)}{j^2}, \quad v_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j(1-x^2).$$



Beantworten Sie für die beiden Folgen jeweils die folgenden Fragen:

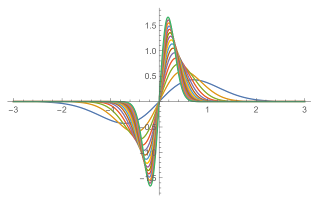


a) Konvergiert die Folge punktweise gegen eine Funktion $C([-1,1])$?

b) Konvergiert die Folge in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm?

Aufgabe 2: Sei $c \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C((-\infty, c])$ gegeben durch

$$u_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$



a) Zeigen Sie, dass diese Folge für alle $c \in \mathbb{R}$ punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert.

b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm?

Aufgabe 3: Geben Sie eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(0,1)$ mit folgenden Eigenschaften an: $f_k(x) \le f_m(x)$ für alle $x \in (0,1)$ und $k \le m$ sowie $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in (0,1)$ und $f \in C(0,1)$, aber $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty \neq 0$.

Aufgabe 4: Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\overline{B_1(0)})$ mit $u_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ gleichmäßig gegen $u(x) = |x|$ konvergiert.

Aufgabe 5 (4+4+4 Punkte): Man sagt, dass die Banach-Algebra $(V, \|\cdot\|)$ ein Einselement besitzt, wenn es ein $v_0 \in V$ gibt, sodass $v_0 \times v = v$ und $v \times v_0 = v$ für alle $v \in V$.

a) Zeigen Sie, dass der Banachraum $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ eine Banach-Algebra ist.

b) Besitzt die Banach-Algebra $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ein Einselement?

c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Besitzt $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Einselement?

Aufgabe 6: Geben Sie an, ob die Folgen gleichgradig stetig sind:

a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset C([0,1])$ mit $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$,

b) $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1])$ mit $g_n(x) = \cos(nx)$,

c) $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,c])$ mit $h_n(x) = x^n$ und $c > 0$.

Aufgabe 7: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ und $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^2([a,b])$ eine Folge mit $u_n(0) = u_n'(0) = 0$ und $\|u_n''\|_\infty \leq 1$. Zeigen Sie, dass die Folge eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 8: Sei $\alpha \in (0,1]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ die Menge der Hölder-stetigen Funktionen, das heißt

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}; u \text{ stetig und } [u]_\alpha < \infty\} \text{ mit } [u]_\alpha = \sup_{x\neq y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Der Raum $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm $\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_\infty + [u]_\alpha$ ein Banachraum.

a) Sei $A \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine beschränkte Menge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{0,\alpha}$. Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ folgenkompakt in $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

b) Sei $0 < \beta < \alpha$ und $A \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ wie in a). Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ folgenkompakt in $(C^{0,\beta}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\beta})$ ist.

Aufgabe 9: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $k \in C([a,b]^2)$. Wir definieren $T : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ durch

$$(Tu)(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)dy.$$

a) Zeigen Sie, dass der Operator T beschränkt ist.

b) Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b])$ mit $\|u_n\|_\infty < 1$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{Tu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b])$ eine konvergente Teilfolge in $C([a,b])$ besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie das Theorem von Ascoli.

Aufgabe 10 (4+4 Punkte): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $y \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass der Raum $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(C(\overline{\Omega})\right)^*$ gegeben durch

$$\phi_n(u) = \cos(n)\int_\Omega u(x)dx + 2\sin\left(\tfrac{1}{1+n}\right)u(y)$$

eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge besitzt.