Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **SS 2020**

Funktionalanalysis

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 14.06.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen linear und stetig sind und geben Sie jeweils den adjungierten Operator an:

a) $\Lambda_1 : (L^2(0,\infty), \|\cdot\|_{L^2(0,\infty)}) \to (\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$, gegeben durch $\Lambda_1 f = \left(\int_{k-1}^k h(x)f(x)dx\right)_{k\in\mathbb{N}^+}$, wobei $h \in BC(0,\infty)$ eine fest gewählte Funktion ist.

b) $\Lambda_2 : (\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2}) \to (L^2(0,\infty), \|\cdot\|_{L^2(0,\infty)})$ gegeben durch $\Lambda_2(c_1, c_2, \ldots)(x) = c_k$ für $x \in (k-1, k]$ mit $k \in \mathbb{N}^+$.

Aufgabe 2: Sei die Norm $\|\cdot\|$ für $u \in C^1([0,1])$ gegeben durch $\|u\| = \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}$. Wir definieren den Operator

$$\Lambda : (C^1([0,1]), \|\cdot\|) \to (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty), \quad (\Lambda u)(x) = \cosh(x)u(x).$$

a) Zeigen Sie, dass Λ bijektiv, linear und beschränkt ist.

b) Besitzt Λ eine lineare beschränkte Inverse?

Aufgabe 3 (4+4+2 Punkte): a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $U^\circ \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann $U = V$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass es keinen Banachraum mit abzählbar unendlicher Dimension gibt, d.h. es gibt keinen Banachraum $(V, \|\cdot\|_V)$ und linear unabhängige $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset V$, sodass $V = \text{Spann}(\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{\sum_{k=1}^n c_k v_k; c_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+\}$.

Hinweis: Sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset V$ *wie oben beschrieben und* $U_k := \text{Span}(v_1, \ldots, v_k)$. *Dann gilt* $V = \cup_{k\in\mathbb{N}^+} U_k$. *Verwenden Sie den Satz von Baire und führen Sie dies zu einem Widerspruch.*

c) Gibt es eine Norm, sodass der Raum der Polynome mit dieser Norm zu einem Banachraum wird?

Aufgabe 4: Betrachten Sie den Raum $(C([-1,1], \|\cdot\|_1)$, wobei $\|u\|_1 = \int_{-1}^1 |u(x)|dx$. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ das folgende Funktional gegeben:

$$A_n : (C([-1,1], \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad A_n(u) = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} u(x)dx.$$

a) Zeigen Sie, dass A_n linear und beschränkt für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ ist und $A(u) := \lim_{n\to\infty} A_n(u)$ für jedes $u \in C([-1,1])$ existiert.

b) Überprüfen Sie, ob A_n in der Operatornorm gegen A konvergiert.
Hinweis: Berechnen Sie die Operatornorm von A_n.

Aufgabe 5: a) Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und $\Lambda : V \to W$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. $\{(v, \Lambda v); v \in V\}$ ist abgeschlossen in $(V \times W, \|\cdot\|)$,

ii. Für alle Folgen $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $v_n \to 0$ in V und $\Lambda v_n \to w$ in W gilt $w = 0$.

b) Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und $\Lambda : V \to V$ linear. Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, die außerdem strikt positiv definit ist. Zeigen Sie, dass wenn $B(\Lambda v, w) = B(v, \Lambda w)$ für alle $v, w \in V$ gilt, dann folgt $\Lambda \in (BL(V; V), \|\cdot\|_{V\to V})$.

Aufgabe 6: a) Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume und $\Lambda \in (BL(V; W), \|\cdot\|_{V\to W})$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass es dann zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, sodass

$$c_1\|v\|_V \leq \|\Lambda v\|_W \leq c_2\|v\|_V \text{ für alle } v \in V.$$

b) Sei V ein Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$, sodass $(V, \|\cdot\|_1)$ sowie $(V, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind. Zeigen Sie, dass wenn es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt mit $\|v\|_2 \leq c_1\|v\|_1$ für alle $v \in V$, dann gibt es auch eine Konstante $c_2 > 0$, sodass $\|v\|_1 \leq c_2\|v\|_2$ für alle $v \in V$. Das heißt die beiden Normen sind äquivalent.

Aufgabe 7 (3+4+3 Punkte): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $K \in C([a, b]^2)$. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$u(x) - \int_a^x K(x, y)u(y)dy = g(x), \tag{1}$$

für jedes $g \in C([a, b])$ eine eindeutige Lösung $u \in C([a, b])$ besitzt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass der Operator $\Lambda : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch

$$\Lambda(u)(x) = \int_a^x K(x, y)u(y)dy$$

linear und beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass

$$|\Lambda^n(u)(x)| \leq \frac{\|u\|_\infty M^n}{n!}(x - a)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+.$$

c) Zeigen Sie, dass $\nu(\Lambda) < 1$ und damit die Behauptung, dass es für jedes $g \in C([a, b])$ eine eindeutige Lösung $u \in C([a, b])$ der Gleichung (1) gibt.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$.

Aufgabe 8: a) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und $\|\cdot\|$ die durch das innere Produkt induzierte Norm. Sei $\Lambda \in BL((H, \|\cdot\|); (H, \|\cdot\|))$ ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie, dass dann $\nu(\Lambda) = \|\Lambda\|_{H\to H}$.

b) Berechnen Sie den Spektralradius des Operators

$$\Lambda : (L^2(0, 1), \|\cdot\|_2) \to (L^2(0, 1), \|\cdot\|_2), \quad \Lambda(u)(x) = xu(x).$$