Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **SS 2020**

Funktionalanalysis

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 21.06.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1: Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume.

a) Zeigen Sie, dass ein Operator $K \in BL((V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W))$ genau dann kompakt ist, wenn $\overline{K(B_1(0))}$ kompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass wenn $\dim(V) < \infty$, dann ist jeder lineare und beschränkte Operator $K : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ kompakt.

c) Zeigen Sie, dass der Operator $I : (C^{0,\alpha}([0,1]), \|\cdot\|_{0,\alpha}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch $I(u) = u$ für alle $\alpha \in (0,1)$ kompakt ist.

d) Sei V unendlich dimensional und $I : (V, \|\cdot\|_V) \to (V, \|\cdot\|_V)$ die Identität. Ist dieser Operator kompakt?

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte): a) Sei $N \in \mathbb{N}^+$. Ist der Operator $A : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ definiert durch

$$A(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$$

kompakt?

b) Sei $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ mit $\alpha_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$. Betrachten Sie den Operator $B : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ gegeben durch

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots)\,.$$

Zeigen Sie, dass B kompakt ist.

c) Sei $S : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ der Shift-Operator $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Zeigen Sie, dass es für den Operator $S \circ B$ mit B aus Aufgabenteil b) kein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $(S \circ B)x = \lambda x$ für ein $x \in \ell^2 \backslash \{0\}$.

Aufgabe 3: Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume.

a) Sei $K \in BL((V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W))$ ein kompakter Operator und $\text{Range}(K) \subset W$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass dann $\text{Range}(K)$ endlich dimensional ist.

b) Zeigen Sie, dass der Raum der kompakten Operatoren ein abgeschlossener Unterraum von $BL((V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W))$ ist.

c) Sei $K \in BL((V, \|\cdot\|_V))$ ein kompakter Operator und $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $\ker(K - \lambda I)$ endlich dimensional ist.

Aufgabe 4: a) Sei $X_0 := \{f \in C[0,1]; f(0) = 0)\}$. Zeigen Sie, dass $(X_0, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Sei $t \in [0,1]$ und $\Lambda_t : (X_0, \|\cdot\|_\infty) \to (X_0, \|\cdot\|_\infty)$ definiert durch

$$\Lambda_t(f)(x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{falls } x \in [t,1], \\ 0 & \text{falls } x \in [0,t]. \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass $\Lambda \in BL((X_0, \|\cdot\|_\infty); (X_0, \|\cdot\|_\infty))$.

c) Berechnen Sie die Operatornorm von Λ_t.

d) Für welche $t \in [0,1]$ ist Λ_t ein kompakter Operator?

Aufgabe 5: Überprüfen Sie, ob die folgenden Operatoren $\Lambda_i : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ kompakt sind:

a) $(\Lambda_1 u)(x) = u(x^2)$;

b) $(\Lambda_2 u)(x) = \int_0^1 e^{xy} f(y)dy$;

c) $(\Lambda_3 u)(x) = u(0) + x^2 u(1)$.

d) $(\Lambda_4 u)(x) = xu(x)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte): Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume. Angenommen $A \in BL((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y))$ ist kompakt und $B \in BL((Y, \|\cdot\|_Y), (Z, \|\cdot\|_Z))$ ist injektiv. Zeigen Sie, dass es dann für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in X$

$$\|Ax\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C_\varepsilon \|BAx\|_Z.$$

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist als Lemma von Ehrling bekannt.
Hinweis: Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in X$, sodass $\|A(x_n)\|_Y > \varepsilon \|x_n\|_X + n\|BA(x_n)\|_Z$. Führen Sie das zu einem Widerspruch.

Aufgabe 7: Betrachten Sie die Operatoren $\Lambda_+, \Lambda_- : (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch

$$(\Lambda_+ u)(x) = u(x) + u(-x), \quad (\Lambda_- u)(x) = u(x) - u(-x).$$

Zeigen Sie, dass $\Lambda_+, \Lambda_- \in BL((C[-1,1], \|\cdot\|_\infty); (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty))$. Sind die Operatoren kompakt?

Aufgabe 8 (4+4 Punkte): a) Zeigen Sie, dass der Operator $\Lambda_1 : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch $(\Lambda_1 u)(x) = \int_0^x u(y)dy$ linear, beschränkt und kompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass der Operator $\Lambda_2 : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch $(\Lambda_2 u)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u(y)dy$ für $x \neq 0$ und gegeigneter Fortsetzung in $x = 0$ wohldefiniert, linear und beschränkt, jedoch nicht kompakt ist.