Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2020**
Inka Schnieders, M.Sc.

Funktionalanalysis

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 28.06.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2+2+2 Punkte)**:** Sei $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Betrachten Sie den Operator

$$A : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2), \quad (Ax)_k = \alpha_k x_k.$$

a) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) = \overline{\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}^+\}}$.

b) Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge. Begründen Sie, dass es einen Operator $B : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ gibt, sodass $\sigma(B) = K$.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jede kompakte Teilmenge eines separablen Banachraumes wieder separabel ist.

c) Bestimmen Sie das Spektrum von $C : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ gegeben durch

$$(Cx)_k = \begin{cases} x_k \sin(\frac{1}{k}) & \text{für } k \in \mathbb{N}^+ \text{ ungerade,} \\ x_k \cos(\frac{1}{k}) & \text{für } k \in \mathbb{N}^+ \text{ gerade.} \end{cases}$$

d) Nehmen Sie an, dass $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ und $\alpha_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$. Gibt es dann für jedes $y \in \ell^2$ eine Lösung $x \in \ell^2$ der Gleichung $x - Ax = y$?

Aufgabe 2: Betrachten Sie den Raum $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ und $A : c_0 \to c_0$ gegeben durch $(Ax)_k = \frac{1}{k} x_k$ für $k \in \mathbb{N}^+$.

a) Bestimmen Sie $\sigma_P(A), \sigma_C(A)$ und $\sigma_R(A)$.

b) Was ändert sich, wenn wir c_0 durch ℓ^∞ ersetzen?

Aufgabe 3: Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $A \in BL((V, \|\cdot\|_V))$. Sei außerdem $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom zweiter Ordnung, d.h. $p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$ mit $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dann finden wir, dass auch $p(A) : V \to \mathbb{C}$ gegeben durch $p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2$ ein beschränkter linearer Operator ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)).$$

Hinweis: Für $\sigma(p(A)) \subset p(\sigma(A))$ gehen Sie wie folgt vor: Nehmen Sie an, dass $\lambda \notin p(\sigma(A))$. Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$, sodass $p(\mu_1) = p(\mu_2) = \lambda$. Zeigen Sie, dass $(p(A) - \lambda I) = c_2(A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I)$ und folgern Sie die Behauptung.

b) Sei $P \in BL((V, \|\cdot\|_V))$ eine Projektion. Zeigen Sie, dass dann $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$.

Aufgabe 4: Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Raum und $P : V \to V$ eine stetige Projektion. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Range}(P)$ und $\mathrm{Ker}(P)$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte): Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und $A \in BL((V, \|\cdot\|_V))$.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|A\|\}$.

b) Sei $I \in BL((V, \|\cdot\|_V))$ die Identität. Zeigen Sie, dass wenn $\|A\|_{V\to V} \in \sigma(A)$, dann gilt

$$\|I + A\|_{V\to V} = 1 + \|A\|_{V\to V}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3a).

Aufgabe 6: Wir betrachten den Operator $A : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ gegeben durch

$$(Ax)_k = x_{2k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}^+.$$

a) Zeigen Sie, dass A linear und beschränkt ist und berechnen Sie die Operatornorm.

b) Berechnen Sie den Spektralradius von A.

c) Ist der Operator kompakt?

d) Berechnen Sie den zu A adjungierten Operator A^*.

e) Geben Sie das Punktspektrum $\sigma_P(A)$ an.

Aufgabe 7 (4+2 Punkte): Betrachten Sie den Operator $A : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch $(Au)(x) = u(x)f(x)$, wobei $f \in C[0,1]$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ 4x - 1 & \text{für } x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 4x - 2 & \text{für } x \in (\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

a) Geben Sie das Spektrum $\sigma(A)$ an.

b) Geben Sie $\sigma_P(A), \sigma_C(A)$ und $\sigma_R(A)$ an.

Aufgabe 8: Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und $A \in BL(V, \|\cdot\|_V)$ invertierbar. Zeigen Sie, dass für $\lambda \neq 0$ gilt

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1}).$$