Prof. Dr. Guido Sweers
Übungsleiter: Philip Matura

SS 2022

Funktionalanalysis
Übungsblatt 1

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 12.04.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. **[0+1+4+0 Punkte]** Auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ definiert man die unterschiedlichen Normen

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := \sqrt[p]{\sum\nolimits_{k=1}^{n} |x_k|^p} \text{ für } p \in [1, \infty)$$
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \, .$$

   (a) Wann sind zwei Normen äquivalent?

   (b) Begründen Sie, dass all diese Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

   (c) Berechnen Sie die optimalen Konstanten derart, dass

$$c_{1,n} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_{1,n} \|x\|_1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$
$$c_{2,n} \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq C_{2,n} \|x\|_\infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

   (d) Wieso ist $\|\cdot\|_p$ mit $p \in (0, 1)$, ebenfalls wie oben definiert, keine Norm?

2. **[2+3 Punkte]** Den Vektorraum aller stetigen Funktionen f auf $[0,1]$ nennt man $C\,[0,1]$. Man definiert

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| \, dx \text{ und } \|f\|_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \, .$$

   (a) Zeigen Sie, dass für alle $f \in C\,[0,1]$ gilt, dass $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

   (b) Kann man eine Konstante $C > 0$ finden derart, dass $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_1$ für alle $f \in C\,[0,1]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. **[1+1+3 Punkte]** $C\,[0,1]$ mit $\|f\| := \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ ist ein normierter Vektorraum. Wir definieren einige Abbildungen auf diesem Vektorraum.

$$A(f)(x) := f(x^2), \quad B\,(f)\,(x) := \int_0^x f(s) ds \text{ und } C(f)\,(x) := \sqrt[3]{\int_0^x (f(s))^3 \, ds}.$$

(a) Welche Abbildungen sind linear?

(b) Welche Abbildungen sind beschränkt?

(c) Für welche Abbildungen existiert eine beschränkte inverse Abbildung?

4. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

   i Es gibt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $x_0 = Ay$ genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}^n$ hat.

   ii Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert $y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = Ay$.

   iii $\det A \neq 0$.

   iv Es gibt eine reelle $n \times n$-Matrix B derart, dass $ABx = x$ und $BAx = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

5. **[5 Punkte]** Die Menge aller reellen Folgen $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ nennt man c_0.
   Sei $A : c_0 \to c_0$ eine lineare Abbildung. Sind die folgenden Aussagen äquivalent?

   i Es gibt $x_0 \in c_0$ derart, dass $x_0 = Ay$ genau eine Lösung $y \in c_0$ hat.

   ii Für alle $x \in c_0$ existiert $y \in c_0$ mit $x = Ay$.