**Prof. Dr. Guido Sweers** **SS 2022**
**Übungsleiter: Philip Matura**

# Funktionalanalysis
## Übungsblatt 10

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 21.06.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf
.

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheit.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **[1+2+2 Punkte]** Wir definieren $A : \ell_2 \to \ell_2$ durch $(Ax)_k := \frac{k}{k+1} x_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $A \in BL\left(\left(\ell_2, \|\cdot\|_2\right)\right)$.
   (b) Ist $A$ Fredholm?
   (c) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$.

3. Wir definieren $A \in BL\left(\left(\ell_2, \|\cdot\|_2\right)\right)$ durch $(Ax)_k = \displaystyle\sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+m} x_{k-m}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\sigma_P(A) = \left\{\frac{1}{2^k}; k \in \mathbb{N}^+\right\}$.
   (b) Ist $A$ kompakt?
   (c) Beschreiben Sie das Spektrum.

4. Sei $f \in C[0,1]$ eine feste Funktion und definiere $A_f \in L\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ durch
$$(A_f u)(x) = f(x)u(x).$$
   Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \sigma_P(A_f)$ gilt, dass die Vielfachheit $\infty$ ist.

5. Betrachte $C[0,1]$ mit den Teilräumen

$$\begin{aligned} C_{\ell=0}[0,1] &:= \{u \in C[0,1]\,; u(0)=0\} \quad \text{und} \\ C_0[0,1] &:= \{u \in C[0,1]\,; u(0)=u(1)=0\}\,. \end{aligned}$$

Sei $\theta \in (0,1)$.

(a) Gibt es $v \in C_{\ell=0}[0,1]$ mit $\|v\|_\infty = 1$ und

$$\inf_{u \in C_0[0,1]} \|v-u\|_\infty = \theta?$$

(b) Gibt es $v \in C_{\ell=0}[0,1]$ mit $\|v\|_2 = 1$ und

$$\inf_{u \in C_0[0,1]} \|v-u\|_2 = \theta?$$

6. **[5 Punkte]** Betrachte $K \in L(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, definiert durch

$$(Ku)(x) := x^2 u(0) + u(1)\,.$$

Bestimmen Sie das Spektrum des Operators.

7. **[1+2+2+2+2+1 Punkte]** Betrachten Sie den Operator $K \in L(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, definiert durch

$$(Ku)(x) = (1-x)\int_0^x tu(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)\,u(t)\,dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass $K$ kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\|K\| \le \frac{1}{8}$.

(c) Begründen Sie, dass $(\lambda I - K)\,u = g \in C[0,1]$ für $|\lambda| > \frac{1}{8}$ genau eine Lösung $u \in C[0,1]$ hat.

(d) Für $u \in C[0,1]$ gilt $Ku \in C^2[0,2]$ und ist $v = Ku$ die Lösung von

$$\begin{cases} -v''(x) = u(x) \text{ für } x \in (0,1)\,, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $v_c = (I - cK)^{-1} Ku$ für $|c| < 8$ eine wohldefinierte Lösung ist von

$$\begin{cases} -v''(x) - cv(x) = u(x) \text{ für } x \in (0,1)\,, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(e) Berechnen Sie $\sigma_P(K)$.

(f) Zeigen Sie, dass es für jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{k^2\pi^2; k \in \mathbb{N}^+\}$ und jede Funktion $u \in C[0,1]$ eine Lösung $v$ von (1) gibt.