Prof. Dr. Guido Sweers
Übungsleiter: Philip Matura

SS 2022

Funktionalanalysis
Übungsblatt 11

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 28.06.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. **[1+2+2 Punkte]** Bestimmen Sie das Spektrum mit Angabe von Punktspektrum, kontinuierlichem Spektrum und Residualspektrum für:

   (a) $S_+ \in BL\left(\ell_1, \|\cdot\|_1\right)$ definiert durch

   $$\left(S_+ x\right)_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 1, \\ x_{k-1} & \text{für } k \geq 2. \end{cases}$$

   (b) $S_- \in BL\left(\ell_1, \|\cdot\|_1\right)$ definiert durch

   $$\left(S_- x\right)_k = x_{k+1}.$$

   (c) $L \in BL\left(\ell_1, \|\cdot\|_1\right)$ definiert durch

   $$(Lx)_k = \frac{1}{\log(k+1)} x_k.$$

2. Ändert sich das Spektrum, wenn man S_+, S_- und L aus der ersten Aufgabe als Operator in $BL\left(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$ oder $BL\left(c_0, \|\cdot\|_\infty\right)$ betrachtet?

3. **[1+1+4+4+0+0+3+2 Punkte]** Wir definieren für $x, y \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die Funktion $G : \overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)} \to [0, \infty]$ durch

   $$G(x,y) := \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{|x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y + 1}{|x-y|^2}\right).$$

   Aufgepasst: hier steht $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$.

   Setzt man $u := \mathcal{G}f$ mit

   $$\int_{B_1(0)} G(x,y) f(y) dy \text{ für } f \in C(\overline{B_1(0)}),$$

   dann gilt

   $$\mathcal{G} \in BL\left(\left(C(\overline{B_1(0)}), \|\cdot\|_\infty\right); \left(C^1(\overline{B_1(0)}), \|\cdot\|_{C^1}\right)\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\log r = 0$ für $r > 0$. Begründen Sie damit, dass

$$-\Delta_x G\left(x,y\right) = 0 \text{ für } x \in B_1(0) \setminus \{y\}.$$

NB $\Delta_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2$ wenn $x_1 = r\cos\varphi$ und $x_2 = r\sin\varphi$.

(b) Zeigen Sie auch, dass $\lim_{t\uparrow 1} G\left(tx,y\right) = 0$ für $x \in \partial B_1(0)$ und $y \in B_1(0)$.

Man kann sogar zeigen, dass $u := \mathcal{G}f$ für $f \in C(\overline{B_1(0)})$ die eindeutige schwache Lösung ist von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(c) Man kann $\mathcal{G}$ auch wie folgt betrachten: $\mathcal{G} \in BL\left(C(\overline{B_1(0)}), \|\cdot\|_\infty\right)$. Zeigen Sie, dass dieses $\mathcal{G}$ kompakt ist.

(d) Man bekommt alle Eigenfunktionen von $\mathcal{G} \in BL\left(C(\overline{B_1(0)}), \|\cdot\|_\infty\right)$ in der Form

$$\Phi\left(r,\varphi\right) = g(r)\sin\left(n\varphi\right) \text{ mit } n \in \mathbb{N}^+ \text{ und}$$
$$\Phi\left(r,\varphi\right) = g(r)\cos\left(n\varphi\right) \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

und $g \in C^2\left[0,1\right]$. Welche n-abhängigen Randwertprobleme bekommt man für g?

(e) Für jedes n bekommt man abzählbar viele unabhängige Lösungen $\{g_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ des letzten Randwertproblems mithilfe von Besselfunktionen. Wie? *Hinweis: googlen.*

(f) Mit $\sigma \in \{c,s\}$ für sin oder cos schreiben wir für alle solche Funktionen:

$$\{\Phi_{n,k,\sigma}\}_{(n,k,\sigma)\in I} := \{g_{n,k}(\cdot)\sin\left(n\cdot\right)\}_{n\in\mathbb{N}^+,k\in\mathbb{N}^+} \cup \{g_{n,k}(\cdot)\cos\left(n\cdot\right)\}_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}^+}.$$

Es gilt

$$\begin{cases} -\Delta\Phi_{n,k,\sigma} = \lambda_{n,k}\Phi_{n,k,\sigma} & \text{in } B_1(0), \\ \Phi_{n,k} = 0 & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases}$$

mit $\lambda_{n,k} = \mathcal{O}\left(n^2 + k^2\right)$. Mit diesen Funktionen $\{\Phi_{n,k,\sigma}\}_{(n,k,\sigma)\in I}$ passend skaliert, also

$$\langle\Phi_{n,k,\sigma}, \Phi_{n,k,\sigma}\rangle = 1,$$

hat man ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2\left(B_1(0)\right)$. Zeigen Sie, dass

$$\langle\Phi_{n_1,k_1,\sigma_1}, \Phi_{n_2,k_2,\sigma_2}\rangle = 0,$$

wenn entweder $n_1 \neq n_2$ oder $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

(g) Für $f \in C(\overline{B_1(0)})$ berechnen wir, mit Φ wieder in kartesischen Koordinaten,

$$f_{n,k,\sigma} = \int_{B_1(0)} \Phi_{n,k,\sigma}\left(x\right)f\left(x\right)dx.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_{L^2(B_1(0))} = \sqrt{\sum\nolimits_{(n,k,\sigma)\in I} |f_{n,k,\sigma}|^2}.$$

(h) Wenn gilt, dass

$$f(\cdot) = \sum_{(n,k,\sigma)\in I} f_{n,k,\sigma}\Phi_{n,k,\sigma}(\cdot), \tag{$*$}$$

wie kann man $\mathcal{G}f$ wie in $(*)$ mit Hilfe der Funktionen $\Phi_{n,k,\sigma}$ schreiben?