**Prof. Dr. Guido Sweers** **SS 2022**
**Übungsleiter: Philip Matura**

# Funktionalanalysis
## Übungsblatt 2

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 19.04.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. **[1+1+2+1 Punkte]** Wir betrachten in Hilbertraum $\left(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ die Einheitsvektoren $e_n$, definiert durch

$$e_n := (0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots)}_{1 \text{ an } n\text{-ter Stelle}}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Menge in $\ell^2$ ist.
   (b) Wahr oder nicht? Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.
   (c) Hat die Folge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge?
   (d) Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in \ell^2$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \langle e_n, x\rangle = 0$.

2. **[1+2+1+1 Punkte]** Wir betrachten $\ell^\infty$ mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Definiere den Operator $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch

$$A\,(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(x_1, x_2 - \tfrac{1}{2}x_1, x_3 - \tfrac{2}{3}x_2, x_4 - \tfrac{3}{4}x_3, \dots\right),$$

also $(Ax)_1 = x_1$ und $(Ax)_k = x_k - \frac{k-1}{k}x_{k-1}$ falls $2 \le k \in \mathbb{N}$. Zwei Teilräume von $\ell^\infty$ sind wie folgt definiert:

$c_0$ : die Teilmenge aller nach 0 konvergierenden Folgen, also

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in c_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

$c_{00}$ : die Teilmenge aller Folgen mit Termen, die nur endlich oft ungleich 0 sind, also

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in c_{00} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } \forall k > n : x_k = 0.$$

   (a) Berechnen sie $\|A\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty}$.
   (b) Es gilt $Ker\,(A) = \{0\}$. Existiert $A^{\text{invers}} : \ell^\infty \to \ell^\infty$?
   (c) Es gilt $A\,(c_0) \subset c_0$. Ist $A : c_0 \to c_0$ injektiv? Ist $A : c_0 \to c_0$ surjektiv?
   (d) Es gilt $A\,(c_{00}) \subset c_{00}$.Ist $A : c_{00} \to c_{00}$ injektiv? Ist $A : c_{00} \to c_{00}$ surjektiv?

3. **[5 Punkte]** Seien $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}^+$, sodass $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}^2 < \infty$. Definiere den Operator $A : \ell^2 \to \ell^2$ durch

$$A(x_1, x_2, \dots) := \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j} x_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2,j} x_j, \dots \right).$$

Zeigen Sie, dass der Operator wohldefiniert und beschränkt ist.

4. Sei $V$ ein reeller Vektorraum. Eine Funktion $p : V \to \mathbb{R}$ heißt subadditiv, wenn $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ für alle $x, y \in V$.
Nehme an, dass $p : V \to \mathbb{R}$ subadditiv ist und das gilt $p(tx) = p(x)$ für alle $x \in V$ und $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $p$ dann linear ist.

5. Zeigen Sie, dass $\left\{ e^{(k)}; k \in \mathbb{N}^+ \right\}$ mit

$$e_j^{(k)} = \delta_{kj} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = j, \\ 0 & \text{für } k \neq j, \end{cases}$$

eine Schauderbasis ist für $\left(\ell^2, \|\cdot\|_2\right)$.

6. **[2+2+1 Punkte]** Eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es endlich viele Punkte $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ gibt, sodass für $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

   i. $f$ auf $(x_{k-1}, x_k)$ ist stetig,
   ii. $f(0)$, $f(x_k)$, $\lim_{x \uparrow x_k} f(x)$ und $\lim_{x \downarrow x_{k-1}} f(x)$ existieren.

Es werden alle Funktionen identifiziert, die bis auf endlich viele Stellen übereinstimmen. Sei $X$ dieser Vektorraum der stückweise stetigen Funktionen auf $[0, 1]$.

   (a) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_1)$ mit

   $$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx \text{ für } f \in X$$

   ein normierter Raum ist. Ist es ein Banachraum?
   (b) Zeigen Sie, dass $C[0, 1]$ nicht abgeschlossen ist in $X$ bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.
   (c) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$, mit $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [0, 1]\}$, keine äquivalente Normen sind.