**Prof. Dr. Guido Sweers** **SS 2022**
**Übungsleiter: Philip Matura**

# Funktionalanalysis
## Übungsblatt 3

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 26.04.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf
.

1. **[2+1+4+3 Punkte]** Sei $P$ die Menge aller reellen Polynomen in $x \in \mathbb{R}$ und sei $\|\cdot\|$ auf $P$ definiert durch
$$\|p\| = \sup\left\{|p(x)|\,;x \in [-1,1]\right\}.$$
Wir definieren $A : P \to \mathbb{R}$ durch $(Ap)\,(x) = p'(0)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $P$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $A : (P, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ nicht beschränkt ist .

   (c) Sei nun $p$ ein Polynom von Grad höchstens $n$, also $p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k$.

   - Zeigen Sie, dass $p(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, genau dann, wenn $p\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
   - Zeigen Sie auch, dass man die Koeffizienten $\{p_k\}_{k=0}^{n}$ als Linearkombination von diesen $\left\{p\left(\frac{k}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n}$ schreiben kann:
$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} p(0) \\ p(\frac{1}{n}) \\ \vdots \\ p(1) \end{pmatrix}.$$

   *Hinweis: Ein Theorem von Lagrange besagt, dass wenn $p$ ein Polynom ist von Grad höchstens $n \in \mathbb{N}$, und $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ verschiedene Stellen in $\mathbb{R}$ sind, dann gilt*
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \left( \prod_{0 \le \ell \le n,\ \ell \ne k} \frac{x - x_\ell}{x_k - x_\ell} \right) p(x_k).$$

   (d) Wir nennen $P_n$ die Teilmenge von $P$, die genau alle Polynome von Grad höchstens $n$ enthält. Wir behaupten, dass $A : (P_n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist beschränkt, weil $P_n$ endlich dimensional ist. Ist das ein Widerspruch zu b? Können Sie $\|A\|_{(P_n,\|\cdot\|)\to(\mathbb{R},|\cdot|)}$ mithilfe der Matrix $B_n$ abschätzen?

2. Sei $(V, \|\cdots\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann ein lineares und stetiges Funktional

$$\varphi : V \to \mathbb{R}$$

existiert derart, dass $\varphi(v_i) = \alpha_i$.

3. **[1+1+2+1 Punkte]** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Sei $A$ eine nichtleere, konvexe Teilmenge von $V$.

   (a) Zeigen Sie, dass das Innere von $A$, bezeichnet als $A^\circ$, ebenfalls konvex ist.

   (b) Zeigen Sie, dass wenn $a_1 \in A$ und $a_2 \in A^\circ$, dann gilt auch

   $$\theta a_1 + (1-\theta)\, a_2 \in A^\circ \text{ für alle } \theta \in [0,1)\,.$$

   (c) Beweisen Sie mithilfe des Trennungssatzes von Hahn-Banach, dass wenn $A^\circ \neq \emptyset$, dann gilt

   $$A \subset \overline{A^\circ}.$$

   *Hinweis: Wenn $x \in A \backslash \overline{A^\circ}$, dann gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \cap \overline{A^\circ} = \emptyset$ und man verwende die geometrische Version von Hahn-Banach.*

   (d) Gilt $A \subset \overline{A^\circ}$ auch, wenn $A$ nicht konvex ist?

4. **[3+2 Punkte]** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum und sei $U \subset V$ ein Teilraum.

   (a) Zeigen Sie die Äquivalenz:

   - $U$ liegt dicht in $V$.
   - Für jede stetige lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in U$ folgt, dass $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in V$.

   *Hinweis: Für $\Leftarrow$ nimmt man an, dass es $v_0 \in V$ gibt mit $B_\varepsilon(v_0) \cap U \neq \emptyset$ und man verwende Hahn-Banach.*

   (b) Zeigen Sie: Wenn $U$ ein abgeschlossener Teilraum von $V$ ist, und $v \in V \setminus U$, dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(v) = 1$ und $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in U$.

5. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Wenn $A, B \subset V$ abgeschlossene konvexe Mengen sind und $A \cap B = \emptyset$, dann sagt Hahn-Banach, dass wenn $A$ außerdem kompakt ist, dann existieren eine stetige lineare Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}$ und $c_i \in \mathbb{R}$ mit

   $$\varphi(a) \le c_1 < c_2 \le \varphi(b) \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \in B.$$

   Braucht man die Kompaktheit von $A$? Begründen Sie Ihre Antwort.