Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2022**
Übungsleiter: Philip Matura

Funktionalanalysis
Übungsblatt 4

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 03.05.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. **[2+1+2 Punkte]** Für reelle Folgen $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ definiert man

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}^+} |x_k| \text{ und } \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| .$$

- $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist der Vektorraum aller nach 0 konvergierenden reellen Folgen.
- $\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$ ist der Vektorraum aller summierbaren reellen Folgen.

Wir wollen zeigen, dass der Dualraum von $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ mit $\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$ identifiziert werden kann.

(a) Sei $y \in \ell^1$ und definiere $F_y : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ durch:

$$F_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k$$

Zeigen Sie, dass F_y für jedes $y \in \ell^1$ linear und beschränkt ist und dass sogar folgendes gilt:

$$\|F_y\|_{(c_0,\|\cdot\|_\infty)\to(\mathbb{R},|\cdot|)} = \|y\|_1 .$$

(b) Sei nun $F \in (c_0)^*$. Sei $e_k \in c_0$ definiert durch

$$e_k = \underbrace{\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}}_{\text{mit einer 1 an } k\text{-ter Stelle.}}$$

Zeigen Sie, dass $\{F(e_1), F(e_2), F(e_3), \dots\} \in \ell^1$.

(c) Wieso gilt so, dass der Dualraum von $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ mit $\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$ zu identifizieren ist?

2. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum. Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ eine Folge in H. Zeigen Sie folgendes:

(a) Wenn $x_k \to x$ in H, dann gilt auch $x_k \rightharpoonup x$ in H und $\|x_k\| \to \|x\|$ (jeweils für $k \to \infty$).

(b) Wenn $x_k \rightharpoonup x$ in H und $\|x_k\| \to \|x\|$, dann gilt auch $x_k \to x$ in H (jeweils für $k \to \infty$).

3. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|$ und seien $\{v_0, v_1, v_2\}$ unabhängige Vektoren in H. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) = \|v_0 + x_1 v_1 + x_2 v_2\|.$$

   (a) Zeigen Sie, dass f ein positives Minimum hat.

   (b) Geben Sie an, dass das Minimum für genau ein Paar (x_1, x_2) erreicht wird.

4. **[2+2+2+2 Punkte]** Man definiert für eine reelle Folge $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$

$$\|x\|_p := \left(\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{für } p \in [1, \infty),$$
$$\|x\|_\infty := \sup\nolimits_{k\in\mathbb{N}^+} |x_k|,$$

   und setzt für $p \in [0, \infty]$:

$$\ell^p := \left\{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} ; \|x\|_p < \infty\right\}.$$

   Sei nun $1 \le p < q \le \infty$.

   (a) Zeigen Sie, dass gilt $\ell^p \subset \ell^q$ und $\ell^p \neq \ell^q$.

   (b) Ist die Abbildung $I : \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right) \to \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right)$, definiert durch $Ix = x$, stetig?

   (c) Ist $A = \left\{x \in \ell^p; \|x\|_p < 1\right\}$ eine konvexe Teilmenge von ℓ^q?

   (d) Ist $B = \left\{x \in \ell^p; \|x\|_q < 1\right\}$ eine konvexe Teilmenge von ℓ^p?

   Hinweis: betrachten sie erst $p = 2$ und $q = \infty$.

5. **[2+2+2+1 Punkte]** Wir betrachten

$$C_{\lim}(\mathbb{R}) := \left\{v \in C(\mathbb{R}); \lim_{x\to\infty} v(x) \text{ und } \lim_{x\to-\infty} v(x) \text{ existieren}\right\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $(C_{\lim}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|v\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |v(x)|$ ein normierter Vektorraum ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\phi : C_{\lim}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\phi(v) := \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^{M} v(x)\, dx.$$

   ein stetiges lineares Funktional ist.

   (c) Zeigen Sie, dass man dieses Funktional zu $\tilde{\phi} \in L^\infty(\mathbb{R})^*$ erweitern kann.

   (d) Zeigen Sie, dass keine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ existiert mit

$$\tilde{\phi}(v) = \int_{\mathbb{R}} v(x) f(x)\, dx \text{ für alle } v \in L^\infty(\mathbb{R}).$$