Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2022**
Übungsleiter: Philip Matura

Funktionalanalysis
Übungsblatt 5

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 10.05.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf
.

1. **[2+1+2+0 Punkte]** Wir betrachten in $\left(L^2(0,1), \|\cdot\|_2\right)$ mit
$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 u(x)^2 dx\right)^{1/2}$$
die Funktionen $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ für $v_n(x) = \sin(n\pi x)$. Wir setzen
$$V_0 = \operatorname{Span}\left(\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}\right).$$
   (a) Sei $u(x) = (\sin(\pi x))^3$. Gilt $u \in V_0$?
   (b) Sei $w(x) = (\sin(\pi x))^4$. Gilt $w \in V_0$?
   (c) Sei $z(x) = x(1-x)$. Man kann für $x \in [0,1]$ zeigen, dass
$$x(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}\right)^3 \sin((2n+1)\pi x). \tag{1}$$
   Gilt $z \in \overline{V_0}$?
   (d) Gilt (1) auch für $x < 0$ oder $x > 1$?

2. **[5 Punkte]** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $F : V \to V$ ein stetiger, linearer Operator. Zeigen Sie, dass wenn die Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset V$ schwach gegen $v \in V$ konvergiert, dann konvergiert auch $\{F(v_k)\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ schwach gegen $F(v)$.

3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Eine Menge $U \subset V$ heißt schwach abgeschlossen, wenn bei jeder schwach konvergenten Folge der schwache Limes auch in U liegt.
   (a) Welche Aussage folgt direkt aus der Definition:
      i. Wenn $U \subset V$ abgeschlossen ist, dann ist U auch schwach abgeschlossen.
      ii. Wenn $U \subset V$ schwach abgeschlossen ist, dann ist U auch abgeschlossen.

(b) Zeigen Sie, dass jede konvexe, abgeschlossene Teilmenge $U \subset V$ schwach abgeschlossen ist.

4. **[1+1+1+2 Punkte]** Wir betrachten den Hilbertraum $\left(L^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ mit

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx.$$

(a) Sei f_0 definiert durch $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Zeigen Sie, dass $f_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) Definiere $f_n(x) := f_0(x-n)$. Konvergiert f_n schwach oder stark in $L^2(\mathbb{R})$?

(c) Definiere $f_n(x) := f_0(nx)$. Konvergiert f_n schwach oder stark in $L^2(\mathbb{R})$?

(d) Definiere $f_n(x) := \sqrt{n}\ f_0(nx)$. Konvergiert f_n schwach oder stark in $L^2(\mathbb{R})$?

5. Sei $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Hölder Ungleichung besagt, dass für alle $u \in \ell^p$ und $v \in \ell^q$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k \leq \|u\|_p \|v\|_q .$$

(a) Für $v \in \ell^q$ definiert man $\tilde{v}$ durch

$$\tilde{v}_k = \begin{cases} v_k^{q/p} & \text{wenn } v_k \geq 0, \\ -|v_k|^{q/p} & \text{wenn } v_k < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{v} \in \ell^p$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tilde{v}_k = \|\tilde{v}\|_p \|v\|_q = \|v\|_q^q .$$

(b) Man definiert für $v \in \ell^q$ die Abbildung $\phi_v : \ell^q \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi_v(u) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k u_k \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\phi_v \in (\ell^p)^*$ und, dass $\|\phi_v\|_{(\ell^p)^*} \leq \|v\|_{\ell^q}$.

(c) Zeigen Sie $\|\phi_v\|_{(\ell^p)^*} = \|v\|_{\ell^q}$ mit Hilfe von $\phi_v(\tilde{v})$. Die Abbildung $v \mapsto \phi_v$ ist also eine Isometrie von ℓ^q nach $(\ell^p)^*$ für $p \in (1, \infty)$.

(d) Für $\phi \in (\ell^p)^*$ definiert man $v_\phi = \{\phi(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ für $e_n \in \ell^p$ mit $(e_n)_k = \delta_{nk}$. Zeigen Sie, dass $v_\phi \in \ell^q$.