Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2022**
Übungsleiter: Philip Matura

Funktionalanalysis
Übungsblatt 6

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 17.05.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. **[2+2+1 Punkte]** Wir betrachten $A_+, A_- \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A_\pm = I \pm B$$

mit der Einheitsmatrix I (1 auf der Diagonalen und sonst 0) und

$$\begin{array}{ll} B_{i,j} = \frac{1}{2} & \text{wenn } |i-j| = 1, \\ B_{i,j} = 0 & \text{wenn } |i-j| \neq 1. \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A_+, A_- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beide strikt positiv definit sind.

(b) Für den Spektralradius $\rho(B)$ von B gilt, dass

$$\rho(B) := \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\|B^m\|} = c_n < 1.$$

Zeigen Sie, dass

$$A_\pm^{\text{invers}} = (I \pm B)^{\text{invers}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp B)^k .$$

(c) Zeigen Sie, dass A_- invers-positiv ist und A_+ nicht.
Eine Matrix heißt invers-positiv, wenn folgendes gilt:

$$Au \geq 0 \implies u \geq 0.$$

Bei einem Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ sagt man $u \geq 0$, wenn $u_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum und $B : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, die außerdem strikt positiv definit ist. Auch gilt, dass B symmetrisch ist: $B(u,v) = (v,u)$ für alle $u, v \in H$.
Wir definieren $F : H \to \mathbb{R}$ für $f \in H$ durch

$$F(v) = \tfrac{1}{2} B(v,v) - \langle f, v \rangle .$$

(a) Zeigen Sie, dass F nach unten beschränkt ist: $\inf_{v\in H} F(v) =: m \in \mathbb{R}$.

(b) Wenn F genau durch dieses m nach unten beschränkt ist, dann gibt es eine Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ mit $\lim_{k\to\infty} F(v_k) = m$. Zeigen Sie, dass $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Hinweis: Schreiben Sie $B(v_k - v_\ell, v_k - v_\ell)$ *aus mit Hilfe von* F.

(c) Wegen (b) gibt es dann ein Minimum $v_{\min}$ für F. Zeigen Sie, dass

$$B(v_{\min}, v) = \langle f, v\rangle \text{ für alle } v \in H.$$

(d) Hat F ein eindeutiges Minimum?

3. **[2+2+2+4 Punkte]** Der Raum $(BC(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum. Zeigen Sie, welche der folgenden Folgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ punktweise konvergieren, bzw. divergieren. Untersuchen Sie auch die Konvergenz in Norm.

   (a) $f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{n}x\right)$,

   (b) $f_n(x) = \sin(\frac{n}{n+1}x)$,

   (c) $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{1}{n}\right)$,

   (d) $f_n(x) = \sin\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)$.

4. **[5 Punkte]** Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset C[0,1]$, definiert durch

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x},$$

konvergiert nach 0 für alle $x \in [0,1]$. Ist diese Folge gleichgradig stetig auf $[0,1]$?

Hinweis: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x} = \sqrt{x}\; g(n\sqrt{x})$ für $g(y) = \frac{y}{1+y^2}$.

5. Wir betrachten die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{3/2}\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $f \in C[-1,1]$.

   (b) Zeigen Sie, dass $f'(0)$ existiert.

   (c) Begründen Sie, dass f auf $(-1,1)$ differenzierbar ist.

   (d) Für welche $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in [0,1]$ gilt $f \in C^{k,\gamma}[-1,1]$?

6. Geben Sie eine Funktion $f \in C^{1,1/2}[0,1]$ an, die nicht in $C^{1,\gamma}[0,1]$ für $\gamma > \frac{1}{2}$ liegt.