Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2022**
Übungsleiter: Philip Matura

Funktionalanalysis
Übungsblatt 7

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 24.05.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. Für zwei Folgen $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ und $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ definiert man
$$xy := \{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} .$$
Man sagt $x \in \ell^p$ für $p \in [1,\infty)$, wenn $\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty$.
   (a) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \ell^p$ gilt, dass $xy \in \ell^p$.
   (b) Zeigen Sie auch, dass $\|xy\|_p \le \|x\|_p \|y\|_p$ gilt für alle $x, y \in \ell^p$.

2. **[2+2+2+2 Punkte]** Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert man die Funktion fg durch
$$(fg)(x) := f(x)g(x).$$
Man sagt $f \in L^p(\mathbb{R})$ für $p \in [1,\infty)$, wenn
$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty$$
und $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, wenn
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty.$$
Man sagt $f = g$ in $L^p(\mathbb{R})$, wenn $f(x) = g(x)$ fast überall.
   (a) Gilt hier für $p \in [1,\infty)$, dass $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ impliziert $fg \in L^p(\mathbb{R})$?
   (b) Zeigen Sie, dass wenn $f, g \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ gilt, dann folgt $fg \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.
   (c) Wir nehmen $\|\cdot\|_{p,\infty} := \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_\infty$ als Norm auf $L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass
$$\|fg\|_{p,\infty} \le \|f\|_{p,\infty} \|g\|_{p,\infty} \text{ für alle } f, g \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$
   (d) $\left(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ sind Banachräume, aber $\left(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ für $p \neq \infty$ ist keine Banach-Algebra. Sind $\left(L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{p,\infty}\right)$ Banach-Algebren?

3. (a) **[2 Punkte]** Wir betrachten $\left(C^1(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einem beschränkten Gebiet und mit

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \|u\|_\infty + \||\nabla u|\|_\infty \text{ und } |\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie, dass für $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt, dass

$$\|uv\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|v\|_{C^1(\overline{\Omega})}.$$

(b) **[0 Punkte]** Wir betrachten $\left(C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}\right)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einem konvexen, beschränkten Gebiet und mit

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_\infty + \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Zeigen Sie, dass für $u, v \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ gilt, dass

$$\|uv\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \|v\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \|v\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

4. **[3+3+2+2+0 Punkte]** Man findet als Folge des Satzes von Stone-Weierstraß, dass man Polynome verwenden kann um jede funktion in $C(\overline{\Omega})$ zu approximieren, jedenfalls wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist.

(a) Welche Bedingung am Interval $[a, b]$ braucht man um jede Funktion in $u \in C[a, b]$ durch Funktionen

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subset \text{Span}\left(\{\cos(nx), \sin(nx)\}_{n=0}^\infty\right)$$

in $\|\cdot\|_\infty$-Norm approximieren zu können?

(b) Die Fouriertheorie besagt, dass man jede Funktion in $u \in C[0, 2\pi]$ durch Funktionen

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subset \text{Span}\left(\{\cos(nx), \sin(nx)\}_{n=0}^\infty\right) \tag{1}$$

in $\|\cdot\|_2$-Norm approximieren kann. Gilt für eine solche Folge auch Konvergenz in $\|\cdot\|_\infty$-Norm zu u?

(c) Welches Problem hat man, wenn man versucht Stone-Weierstraß für $\left(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2\right)$ zu verwenden, um $u \in C[0, 2\pi]$ durch (1) zu approximieren.

(d) Welches Problem hat man, wenn man versucht Stone-Weierstraß für $\left(C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_2\right)$ zu verwenden, um $u \in C[0, 2\pi]$ durch (1) zu approximieren.

(e) Setzt man

$$\begin{aligned} c_0 &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} u(x)dx, & s_0 &= 0 \\ c_n &= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} u(x)\cos(nx)\,dx, & s_n &= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_0^{2\pi} u(x)\sin(nx)\,dx \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}^+$, so folgt $\|u - u_n\|_{L^2(0,2\pi)} \to 0$ wenn $n \to \infty$ für

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(c_k \cos(kx) + s_k \sin(kx)\right).$$

Kann man für $u \in C[0, 2\pi]$ mit $u(0) = u(2\pi)$ folgern, dass $\|u - u_n\|_\infty \to 0$ wenn $n \to \infty$?

Hinweis. Hier lohnt es sich im Internet zu stöbern.