Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2022**
Übungsleiter: Philip Matura

Funktionalanalysis
Übungsblatt 8

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 31.05.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. **[1+1+2+2+0 Punkte]** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes, beschränktes Gebiet und sei $\gamma \in (0,1)$. Wir betrachten $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit zwei unterschiedlichen Normen:

   - $\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_\infty + [u]_\gamma$ und $[u]_\gamma = \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$,
   - $\|u\|_{\circ,\gamma} := \|u\|_\infty + \limsup\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \sup\limits_{\substack{x \neq y \in \overline{\Omega} \\ |x-y|<\varepsilon}} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\|u\|_{\circ,\gamma} \leq \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$ für $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

   (b) Zeigen Sie, dass wenn $\|\cdot\|_{\circ,\gamma}$ und $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$ nicht äquivalent sind, es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $u_n \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ gibt mit $\|u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \geq n$ und $\|u_n\|_{\circ,\gamma} = 1$.

   (c) Zeigen Sie, dass wenn $\|u_n\|_{\circ,\gamma} = 1$ gilt, dann folgt $\|u_n\|_\infty \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$, und:

   - es gibt $\varepsilon_n > 0$ derart, dass für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x-y| < \varepsilon_n$ gilt
   $$|u_n(x) - u_n(y)| \leq 2\,|x-y|^\gamma .$$

   (d) Wenn man zeigen kann, dass $\varepsilon_n \geq \varepsilon_0 > 0$, dann würde aus (c) folgen:
   $$\|u_n\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq 3 + 2\varepsilon_0^{-\gamma} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+.$$

   Es ist nicht sofort klar, ob es so ein ε_0 gibt. Bei der ursprünglichen Aufgabe war diese Schwierigkeit übersehen.

   (e) Gilt die Äquivalenz in dem Fall auch auf $BC^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ (definieren!) bei unbeschränkte konvexe Gebiete?

2. **[2+2+2 Punkte]** Seien (V, d_V), (W, d_W) metrische Räume.

   - Man nennt eine Abbildung $f : (V, d_V) \to (W, d_W)$ offen, wenn
   $$U \subset V \text{ ist offen} \implies f(U) \subset W \text{ ist offen.}$$

   Wenn eine Abbildung $f : (V, d_V) \to (W, d_W)$ stetig ist, dann gilt
   $$U \subset W \text{ ist offen} \implies f^{-1}(U) := \{x \in V; f(x) \in U\} \text{ ist offen.}$$

(a) Zeigen Sie das Letztere.
(b) Geben Sie eine stetige Abbildung an, die nicht offen ist.
(c) Geben Sie eine offene Abbildung an, die nicht stetig ist.

3. **[2+2+2 Punkte]** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann ist $BL\left((V, \|\cdot\|)\right)$ als normierter Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $\Lambda : V \to V$ eine Banach-Algebra und man kann durch analytische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Elemente $f(\Lambda) \in BL\left((V, \|\cdot\|)\right)$ definieren, wenn der Konvergenzradius von f als Potenzreihe bei 0 und der Spektralradius von Λ passen.

   (a) Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2-x}{3}\right)^k$. Für welches $\rho(\Lambda)$ ist $f(\Lambda)$ wohldefiniert?
   (b) Sei $f(x) = \exp(x)$. Für welches $\rho(\Lambda)$ ist $f(\Lambda)$ wohldefiniert?
   (c) Sei $f(x) = \exp(x)$. Für welches $\rho(\Lambda)$ ist $f^{\text{invers}}(\Lambda)$ wohldefiniert?

4. Wir betrachten
$$F : \left(C^1([0,2]), \|\cdot\|_{C^1}\right) \to \left(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{\infty}\right),$$
definiert durch $(F(u))(x) := u(x + x^2)$.

   (a) Zeigen Sie, dass F bijektiv, linear und stetig ist.
   (b) Ist die Inverse linear und stetig?

5. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

   (a) Zeigen Sie, dass wenn U ein Unterraum ist von V und $U^\circ \neq \emptyset$, dann gilt $U = V$.
   (b) Nehmen wir an, V ist abzähbar unendlich dimensional. Das heißt, es gibt $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$, mit $\{v_k\}_{k=0}^n$ jeweils unabhängig, so dass
$$V = \bigcup\nolimits_{n=0}^{\infty} V_n \text{ für } V_n = \operatorname{Span}\left(\{v_k\}_{k=0}^n\right).$$
   Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|)$ kein Banachraum ist.

6. **[1+2+3 Punkte]** Wir betrachten die Menge $\mathfrak{P}$ aller reellen Polynome auf $\mathbb{R}$, das heißt, alle Funktionen der Form
$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$$
mit $m \in \mathbb{N}$ und $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{C[-1,1]}$, definiert durch $\|p\|_{C[-1,1]} := \sup\{|p(x)|\,; x \in [-1,1]\}$, eine Norm ist auf dieser Menge $\mathfrak{P}$.
   (b) Zeigen Sie, $\left(\mathfrak{P}, \|\cdot\|_{C[-1,1]}\right)$ ist kein Banachraum.
   (c) Existiert eine Norm $\|\cdot\|$ für $\mathfrak{P}$ derart, dass $(\mathfrak{P}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist?