Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2022**
Übungsleiter: Philip Matura

Funktionalanalysis
Übungsblatt 9

Die Lösungen zu den bepunkteten Aufgaben müssen als gut lesbares, eingescanntes oder abfotografiertes Dokument im PDF-Format bei Ilias hochgeladen werden. Jede/Jeder Teilnehmer:in sollte ihre oder seine Aufgabe selbstständig bearbeitet haben und einreichen. Abgabeschluss ist am Dienstag, 14.06.2022, um 12 Uhr. Bitte schreiben Sie Name und Matrikelnummer auf die Abgabe und nennen Sie die Datei mit Ihrer Lösung [Name]_[Vorname]_[Übungsblattnummer].pdf .

1. **[2+1+1 Punkte]** Sei $K \in BL\left((V, \|\cdot\|_V);(W, \|\cdot\|_W)\right)$ für die Banachräume $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$. Zeigen Sie:

   (a) K ist kompakt $\iff$ $\overline{K\left(B_1(0)\right)}$ ist kompakt.

   (b) $\dim(V) < \infty \implies K$ ist kompakt.

   (c) $\dim(W) < \infty \implies K$ ist kompakt.

2. Sei $\Omega = (0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ und setze für $\alpha \in (0,1)$ mit den üblichen Normen

$$B_\alpha = \left(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\alpha}\right) \text{ und } B_0 = \left(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty\right).$$

   Zeigen Sie, dass $I : B_\alpha \to B_0$, definiert durch $(Iu)(x) := u(x)$, ein kompakter Operator ist.

3. Wir definieren $A_n \in BL\left((\ell_2, \|\cdot\|_2)\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) := (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

   oder genauer: $(A_n x)_k := x_k$ für $k \leq n$ und $(A_n x)_k := 0$ für $k > n$.

   (a) Zeigen Sie: Weil $\dim(A_n(\ell_2))$ endlich dimensional ist, ist A_n kompakt für jedes $n \in \mathbb{N}^+$.

   (b) Zeigen Sie: Für jedes $x \in \ell^2$ gilt $A_n x \to x$ wenn $n \to \infty$.

   (c) Ist der Identitätsoperator $Ix := x$ kompakt als Grenzwert dieser kompakten Operatoren A_n?

4. **[2+2+2+2+0 Punkte]** Sei $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in c_0$ mit $\alpha_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$. Definiere $A \in BL\left((\ell_2, \|\cdot\|_2)\right)$ durch

$$(Ax)_k = \alpha_k x_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}^+.$$

(a) Zeigen Sie, dass A kompakt ist.

(b) Sei $S \in BL\left(\left(\ell_2, \|\cdot\|_2\right)\right)$ definiert durch

$$(Sx)_1 = 0 \text{ und}$$
$$(Sx)_{k+1} = x_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}^+.$$

Begründen Sie, dass auch $S \circ A$ kompakt ist und das gilt:

$$x \geq 0 \implies (S \circ A)\, x \geq 0.$$

Hier bedeutet $x \geq 0$, dass $x_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}^+$.

(c) Zeigen Sie, dass für den Spektralradius gilt:

$$\rho\,(S \circ A) \leq \max\left\{\alpha_i; i \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

(d) Zeigen Sie, dass $(S \circ A - \lambda I)^{-1} \in BL\left(\left(\ell_2, \|\cdot\|_2\right)\right)$ existiert für $|\lambda| > \max\left\{\alpha_i; i \in \mathbb{N}^+\right\}$?

(e) Finden Sie alle Eigenwerte von $S \circ A$.
Ein Eigenwert von $S \circ A$ ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) derart, dass $x \in \ell^2 \setminus \{0\}$ existiert mit $(S \circ A)\, x = \lambda x$.

5. **[2+2 Punkte]** Wir betrachten $F : \left(C\left([0,1]\right), \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(C\left([0,1]\right), \|\cdot\|_\infty\right)$,definiert durch $\left(F\left(u\right)\right)(x) := u(0) + \int_0^x u(s)ds$.

   (a) Zeigen Sie, dass $F \in BL\left(\left(C\left([0,1]\right), \|\cdot\|_\infty\right)\right)$.

   (b) Zeigen Sie, dass F kompakt ist.

6. Wir betrachten $F : \left(C\left([0,1]\right), \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(C^1\left([0,1]\right), \|\cdot\|_{C^1([0,1])}\right)$ aus der vorigen Aufgabe.

   (a) Zeigen Sie, dass F stetig ist.

   (b) Ist F kompakt, injektiv, surjektiv?

7. **[5 Punkte]** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume. Wir nehmen an, dass

   - $A \in BL\left((X, \|\cdot\|_X); (Y, \|\cdot\|_Y)\right)$ ist kompakt, und
   - $B \in BL\left((Y, \|\cdot\|_Y); (Z, \|\cdot\|_Z)\right)$ ist injektiv.

   Zeigen Sie, dass es dann für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ gibt derart, dass gilt

   $$\|Ax\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C_\varepsilon \|BAx\|_Z \text{ für alle } x \in X.$$

   Bemerkung: Dieses Ergebnis ist als Lemma von Ehrling bekannt.
   Hinweis: Wenn die Behauptung nicht gilt, dann gibt es $\varepsilon > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in X$ derart, dass

   $$\|Ax_n\|_Y > \varepsilon \|x_n\|_X + n \|BAx_n\|_Z.$$

   Führen Sie das zu einem Widerspruch. Man darf annehmen, dass $\|x_n\|_X = 1$ (wieso?) und Ax_n hat dann eine konvergente Teilfolge.