Name:	Aufgabe 1	

Wir betrachten die Banachräume $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\ell^4, \|\cdot\|_4)$, definiert durch

$$\ell^p := \left\{ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} ; \|x\|_p < \infty \right\},$$
$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

a. Zeigen Sie, dass $\|x\|_4 \le \|x\|_2$ für alle $x \in \ell^2 \cap \ell^4$.

b. Gilt $\ell^2 \subset \ell^4$ oder $\ell^4 \subset \ell^2$?

c. Es gibt auch $(L^2(-1,1), \|\cdot\|_2)$ und $(L^4(-1,1), \|\cdot\|_4)$. Wie sind diese Räume definiert?

d. Gilt $L^2(-1,1) \subset L^4(-1,1)$ oder $L^4(-1,1) \subset L^2(-1,1)$?

e. Ist die richtige Inklusion aus d. auch eine Einbettung?

Begründen Sie Ihre Antworten.

a. $\|x\|_4^4 = \sum_{k=1}^\infty x_k^4 = \sum_{k=1}^\infty (x_k^2\, x_k^2) \le \sum_{k=1}^\infty \left(x_k^2 \sum_{m=1}^\infty x_m^2\right) = \left(\sum_{k=1}^\infty x_k^2\right)^2 = \|x\|_2^4$.

b. $x \in \ell^2 \implies \|x\|_2 < \infty \implies \|x\|_4 < \infty \implies x \in \ell^4$. Also $\ell^2 \subset \ell^4$.

x mit $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ liegt in $\ell^4 \setminus \ell^2$. Also $\ell^4 \not\subset \ell^2$.

c. Für $1 \le p < \infty$ ist $\left(L^p(-1,1), \|\cdot\|_p\right)$ die Menge der Äquivalenzklassen (Lebesgue f.ü. identisch) der Funktionen mit $\|u\|_p := \sqrt[p]{\int_{-1}^1 |u(x)|^p\,dx} < \infty$.

d. Mit Cauchy-Schwarz: $\displaystyle\int_{-1}^1 |u(x)|^2\,dx \le \left(\int_{-1}^1 |u(x)|^4\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 1^2 dx\right)^{1/2}$ und dies impliziert $\|u\|_2^2 \le \sqrt{2}\,\|u\|_4^2$ und $\|u\|_2 \le \sqrt[4]{2}\,\|u\|_4$, also $L^4(-1,1) \subset L^2(-1,1)$.

Als Gegenbeispiel: $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ liegt in $L^2(-1,1)$ und nicht in $L^4(-1,1)$.

e. Eine Einbettung ist eine stetige Inklusion und die Stetigkeit folgt aus der Norm-Abschätzung.

NAME: AUFGABE 2

Wir betrachten den reellen Banachraum $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ und die Teilräume c (alle reelle konvergente Folgen) und c_0 (alle reelle Nullfolgen). Wir definieren $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ durch

$$(Ax)_k := x_k - x_{k+1} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+.$$

a. Zeigen Sie: $A(c) \subset c_0$. Ist $A : c \to c_0$ eine Bijektion? Begründen Sie.

b. Berechnen Sie die reellen Eigenwerte von A.

c. Berechnen Sie $\|A - I\|_{\ell^\infty \to \ell^\infty}$.

d. Beweisen Sie: für $|\lambda - 1| > 1$ gilt

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - 1} (A - I) \right)^k .$$

e. Bestimmen Sie das reelle kontinuierliche Spektrum $\sigma_C(A) \cap \mathbb{R}$.

a. $x \in c$ bedeutet $x_\infty := \lim_{k\to\infty} x_k \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\lim_{k\to\infty} (Ax)_k = \lim_{k\to\infty} (x_k - x_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} x_k - \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x_\infty - x_\infty = 0.$$

A ist weder injektiv noch surjektiv: Nicht injektiv, weil $A\{1, 1, 1, \dots\} = \{0, 0, 0, \dots\}$. Nicht surjektiv, weil $y \in c_0$ mit $y_k = 1/k$ kein Original hat, denn $Ax = y$ impliziert $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$.

b. Löse $Ax = \lambda x$ und man findet $(1 - \lambda)x_k = x_{k+1}$. Also $x_k = (1 - \lambda)^{k-1} x_1$. Für und nur für $|1 - \lambda| \le 1$ gilt $x \in \ell^\infty$. Für die reellen Eigenwerte gilt $\lambda \in [0, 2]$.

c. $\|A - I\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\sup_{k\ge1} |-x_{k+1}|}{\sup_{k\ge1} |x_k|} = \sup_{x\ne0} \frac{\sup_{k\ge2} |x_k|}{\sup_{k\ge1} |x_k|} = 1$. Oben wird das Supremum ohne x_1 genommen, also folgt das kleiner gleich 1. Gleichheit folgt für $x = \{1, 1, 1, \dots\}$.

d. Funktionalkalkul: die rechte Seite ist wohl-definiert für $\left\| \frac{1}{1-\lambda} (A - I) \right\| < 1$, das heißt, für $1 = \|(A - I)\| < |1 - \lambda|$. Aus $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1 - x)^{-1}$ folgt dann

$$\frac{-1}{\lambda - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - 1} (A - I) \right)^k = \frac{-1}{\lambda - 1} \left(I - \frac{1}{\lambda - 1} (A - I) \right)^{-1}$$
$$= \Big(-(\lambda - 1)I + (A - I) \Big)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} .$$

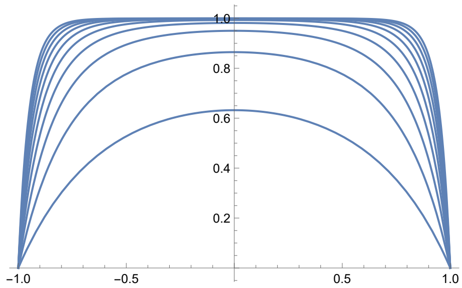
Auch die Summe mit $A - \lambda I$ multiplizieren und Teleskop-Argumente bringen das Ergebnis.

e. Für $\lambda \in [0, 2]$ ist λ einen Eigenwert. Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]$ ist $(A - \lambda I)^{-1}$ wohl-definiert und liegt λ in der Resolvente. Das sonstige Spektrum in $\mathbb{R}$ ist also leer.

Name: Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definiert für $n \in \mathbb{N}^+$ durch

$$f_n(x) = 1 - \exp\left(-n\left(1 - x^2\right)\right).$$



a. Begründen Sie, dass $f_n \in C_0\,[-1,1]$.

b. Zeigen Sie, dass $f_n \to 1$ in $\left(L^2\,(-1,1)\,.\,\|\cdot\|_{L^2}\right)$ für $n \to \infty$.

c. Gilt $f_n \in W_0^{1,2}\,(-1,1)$?

d. Wenn $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset W_0^{1,2}\,(-1,1)$ und $g_n \to g$ in $\left(W^{1,2}\,(-1,1)\,,\|\cdot\|_{W^{1,2}}\right)$ gilt, folgt dann, dass $g \in W_0^{1,2}\,(-1,1)$?

e. Gilt $f_n \to 1$ oder $f_n \rightharpoonup 1$ in $\left(W^{1,2}\,(-1,1)\,,\|\cdot\|_{W^{1,2}}\right)$ für $n \to \infty$?

Hinweis: Für $n \geq 2$ und $h(x) = 1 - x^2$ kann man zeigen, dass gilt

$$\int_{-1}^{1} |f_n'(x)|^2\,dx \geq \frac{n}{50} \quad \textit{und} \quad \int_{-1}^{1} f_n'(x)h'(x)dx \geq \frac{1}{5}.$$

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a. $f_n \in C[-1,1]$ als Zusammenstellung stetiger Funktionen. Weil $f_n(1) = 1 - \exp(0) = 0$ und ähnliches für $x = -1$ gilt, folgt $f_n \in C_0[-1,1]$.

b. Es gilt $\|f_n(x) - 1\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(x) - 1|^2\,dx = \int_{-1}^{1} \exp(-2n(1-x^2))dx$ und weil

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-2n(1-x^2)) = 0 \text{ für } |x| < 1$$

folgt aus monotoner Konvergenz (Folge fällt) oder dominierter Konvergenz (Folge beschränkt), dass gilt: $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \exp(-2n(1-x^2))dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} \exp(-2n(1-x^2))dx = 0$.

c. $f_n \in C_0[-1,1] \cap C^1[-1,1] \subset W_0^{1,2}(-1,1)$.

d. Ja. Es gibt $h_{n,k} \in C_c^\infty(-1,1)$ mit $h_{n,k} \to g_n$ in $W^{1,2}(-1,1)$ für $k \to \infty$. Dann gint es k_n so, dass gilt $h_{n,k_n} \to g$ in $W^{1,2}(-1,1)$ für $n \to \infty$.

e. Zweimal nein. Dies folgt aus den Hinweise, denn $f_n \to 1$ in $W^{1,2}(-1,1)$ bedeutet, dass auch $f_n' \to 0$ in $L^2(-1,1)$, ein Widerspruch zu dem ersten Hinweis. Und $f_n \rightharpoonup 1$ in $W^{1,2}(-1,1)$ bedeutet auch, dass $\langle (f_n - 1)', h' \rangle_{L^2} \to 0$ für $h \in W_0^{1,2}(-1,1)$ und dies wird widersprochen durch den zweiten Hinweis. Bemerke, dass $h \in C_0[-1,1] \cap C^1[-1,1] \subset W_0^{1,2}(-1,1)$.

Name: Aufgabe 4

Wir definieren die folgenden Teilmengen von $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$:

$$E = \left\{x \in \ell^2; \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_k^2 \leq 1\right\} \text{ und } P = \left\{x \in \ell^2; x_k \geq 0 \text{ für alle } k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 2\right\}$$

bei $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

a. Zeigen Sie, dass für $x \in E$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_k^2}$, und zeigen Sie, dass $E \cap P = \emptyset$.

b. Ist E, bzw. P, konvex?

c. Ist E, bzw. P, kompakt?

d. Gibt es eine stetige lineare Funktion $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq 1 \text{ für } x \in E \text{ und } f(x) > 1 \text{ für } x \in P?$$

e. Wir setzen $d(E, P) := \inf\{\|x - z\|_2 ; x \in E \text{ und } z \in P\}$. Gilt $d(E, P) > 0$?

Begründen Sie Ihre Antworten.

a. Mit Cauchy-Schwarz folgt für $x \in E \cap P$, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^k}\sqrt{2}^k x_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_k^2}.$$

Weil $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, gilt für $x \in E \cap P$, dass $2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq 1$, ein Widerspruch.

b. E und P sind beide konvex. Mit Cauchy-Schwarz folgt dies für E. Für P verwendet man die Linearität und, dass die Termen nicht-negativ sind.

c. E ist kompakt als Bild einer kompakter Abbildung von der Einheitskugel, nämlich von A mit $(Ax)_k := \frac{1}{2^{k/2}} x_k$. Abbildung A ist kompakt, weil man A approximieren kann durch Operatoren mit endlich dimensionalem Bildraum: $(A_n x)_k := (Ax)_k$ für $k \leq n$ und $(A_n x)_k := 0$ sonst.

P ist nicht mal abgeschlossen: $x^{(n)} := \{\frac{2}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2}{n}, 0, 0, \dots\} \in P$, wenn man n solche Einträge am Anfang stehen hat, und $x^{(n)}$ konvergiert nach der Nullfolge in der ℓ^2-Norm:

$$\left\|x^{(n)} - 0\right\| = \sqrt{n\left(\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0.$$

d. Also $0 \in \overline{P}$ und für jede stetige lineare Funktion f gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(0) = 0$.

e. Dies impliziert auch $d(E, P) = 0$, denn $0 \leq d(E, P) \leq \left\|0 - x^{(n)}\right\| \to 0$.

Wenn man vermutet hat, dass das Theorem von Hahn-Banach hier helfen könnte, war das nicht hilfreich, hat jedoch ein Paar Punkte geliefert.