

NAME: AUFGABE 1

Die Funktionen $z \mapsto z^{-1}$ und $z \mapsto z^{-3} \exp(z)$ sind definiert von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C}$.

- a. Welche Ordnung hat 0 als Polstelle für diese Funktionen?
- b. Berechnen Sie n_0 und α_n derart, dass $z^{-3} \exp(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n z^n$.
- c. Beide Funktionen sind analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, haben jedoch beide keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wieso nicht?
- d. Hat $z \mapsto 3z^{-1} - 6z^{-3} \exp(z)$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

NAME:

AUFGABE 2

Wir betrachten $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \operatorname{Log}(z^2 - 1) - \operatorname{Log}(1 - z^2)$$

mit $\operatorname{Log}(z) := \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)$ und $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

- a. Begründen Sie, dass f holomorph ist auf $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$.
- b. Zeigen Sie, dass wenn f differenzierbar ist in z , dann gilt $f'(z) = 0$.
- c. Berechnen Sie f in jedem der 4 Quadranten von $\mathbb{C}$.

NAME:

AUFGABE 3

Die Funktion $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, definiert durch $h(z) = \frac{2+z}{2-z}$ ist meromorph.

- a. Geben Sie die Bildmenge $h(\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = 0\})$ an.
- b. Geben Sie die Bildmenge $h(\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\})$ an.
- c. Ist h invertierbar?
- d. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $|h(z)| \leq 1$?

NAME:

AUFGABE 4

Wir betrachten $g(z) := \exp\left(\frac{2+z}{2-z}\right)$.

a. Ist g meromorph auf $\mathbb{C}$?

b. Zeigen Sie:
$$\oint_{|z-1|=2} g(z) dz = \frac{1}{e} \oint_{|z-1|=2} \exp\left(\frac{4}{2-z}\right) dz$$

c. Begründen Sie:
$$\oint_{|z-1|=2} \exp\left(\frac{4}{2-z}\right) dz = -4 \oint_{|w|=1} \exp\left(\frac{1}{w}\right) dw$$

d. Begründen Sie:
$$\oint_{|w|=1} \exp\left(\frac{1}{w}\right) dw = - \oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z^2} dz = \oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z^2} dz$$

e. Berechnen Sie:
$$\oint_{|z-1|=2} g(z) dz$$

NAME:

AUFGABE 5

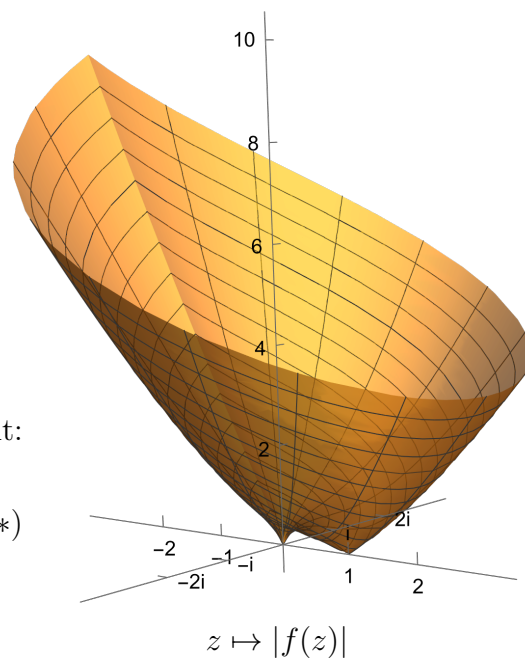
Wir betrachten

$$f(z) := \begin{cases} z \operatorname{Log}(z) & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}.$$

- An welchen Stellen ist f stetig?
- Geben Sie das maximale Gebiet an, wo f holomorph ist.
- Berechnen Sie $f'(-1+i)$.
- Für welche $z \in \mathbb{C}$ kann man $a_n \in \mathbb{C}$ derart finden, dass gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1-i)^n? \quad (*)$$

- Welcher Konvergenzradius hat die Reihe in $(*)$?



NAME:

AUFGABE 6

Wir betrachten $g(z) := z \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{kz}{1 + k^2}\right)^2 \exp\left(\frac{2kz}{1 + k^2}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$.

- a. Angenommen, g ist wohldefiniert, geben Sie die Nullstellenverteilung von g an.
- b. Zeigen Sie, dass für beschränkte z gilt

$$\operatorname{Log} \left(\left(1 - \frac{kz}{1 + k^2}\right)^2 \exp\left(\frac{2kz}{1 + k^2}\right) \right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ für } |k| \rightarrow \infty.$$

- c. Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt in g kompakt konvergiert.
- d. Ist g wohldefiniert für alle $z \in \mathbb{C}$?
- e. Stimmt es, dass $g(z) = z \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{k^2 z^2}{(1 + k^2)^2}\right)$?