NAME: AUFGABE 1

a. Die Funktion $f(z) = \dfrac{2}{1+z^2}$ hat Polstellen. Welche?

b. Wir setzen, wo die rechte Seite definiert ist:

$$F(z) = i\,\mathrm{Log}\,(1-iz) - i\,\mathrm{Log}\,(1+iz)\,.$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist F holomorph? Zeigen Sie, dass F dort eine Stammfunktion ist von f.

Als Erinnerung: Für $z \neq 0$ gilt $\mathrm{Log}\,(z) := \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}\,(z)$ mit $\mathrm{Arg}\,(z) \in (-\pi, \pi]$.

c. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2\arctan'(x)$. Gilt für $x \in \mathbb{R}$, dass $F(x) = 2\arctan(x)$?

d. Berechnen Sie, wenn möglich für jedes $y \in \mathbb{R}$,

$$S(y) := \lim_{x \downarrow 0} \left(F(x+iy) - F(-x+iy)\right)$$

und skizzieren Sie die reelle Funktion $y \mapsto \mathrm{Re}(S(y))$.

Name: Aufgabe 2

Wir betrachten $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$u(x,y) := e^{x-y} \cos(x+y) \quad \text{und} \quad g(z) := \exp\left((1+i)z\right).$$

a. Zeigen Sie, dass $u(x,y) = \operatorname{Re}\left(g(x+iy)\right)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist auf $\mathbb{R}^2$.

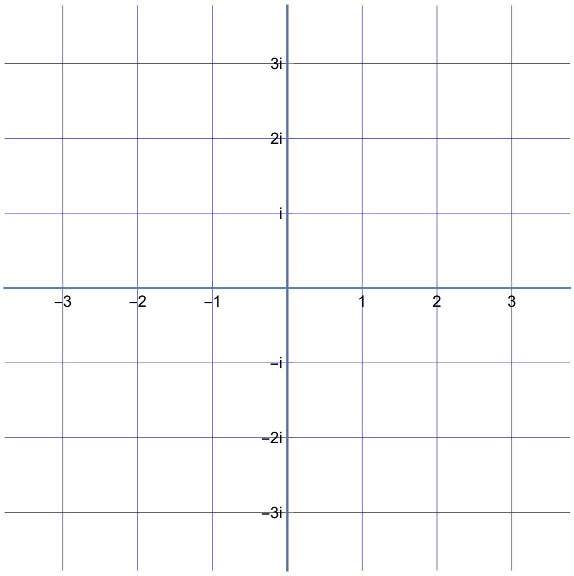
c. Bestimmen Sie alle Funktionen $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derartig, dass $\operatorname{Re}\left(h(x+iy)\right) = u(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

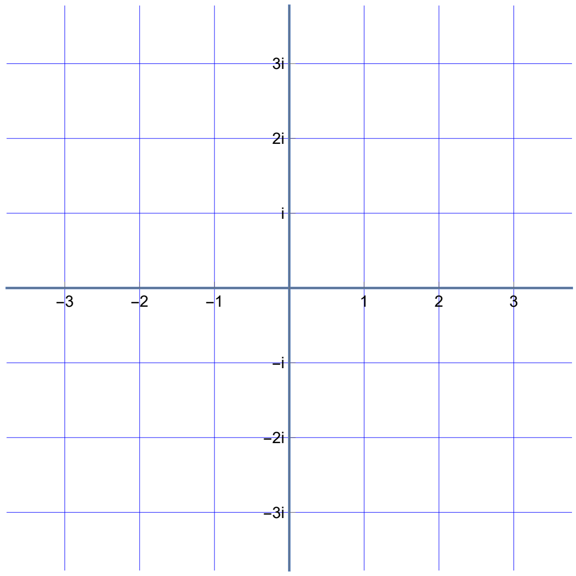
Name: Aufgabe 3

Sei $f(z) = \dfrac{2}{z}$.

a. Sei $\ell := \{x + i; x \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen und skizzieren Sie ℓ und $f(\ell)$.

b. Sei $K := \left\{z \in \mathbb{C}; |z-1| = \sqrt{2}\right\}$. Bestimmen und skizzieren Sie K und $f(K)$.





(Geben Sie bitte deutlich an, welche Menge zu welchem Bild gehört)

NAME:

AUFGABE 4

Wir betrachten $h(z) = \dfrac{1}{z \sin(z)}$.

a. Begründen Sie, dass $h : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph ist.

b. Zeigen Sie, dass es $a_n \in \mathbb{C}$ und $R \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass

$$h(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für } |z| < R.$$

c. Zeigen Sie, dass $R = \pi$ das größtmögliche R ist.

d. Zeigen Sie, dass $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$.

Name: **Aufgabe 5**

Sei h wie in der letzten Aufgabe: $h(z) = \dfrac{1}{z\sin(z)}$. Berechnen Sie

$$\oint_{|z-2|=3} h(z)dz.$$

Name: | Aufgabe 6

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$ und $n, m \in \mathbb{N}$:

$$g_{n,m}(z) := \prod_{k=-m}^{n} \left(1 - \frac{z}{k+\frac{1}{2}}\right) \exp\left(\frac{z}{k+\frac{1}{2}}\right).$$

Hinweis: $\prod\limits_{k=-m}^{n} a_k = \left(\prod\limits_{k=-m}^{-1} a_k\right)\left(\prod\limits_{k=0}^{n} a_k\right).$

a. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Log}\big((1-w)\exp(w)\big) = -\frac{1}{2}w^2 + \mathcal{O}(w^3)$ für $w \to 0$ gilt.

b. Begründen Sie mit a, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ der Grenzwert $\lim\limits_{n,m\to\infty} g_{n,m}(z)$ wohldefiniert ist.

c. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$g_{n,n}(z) = \left(1 - \frac{z}{n+\frac{1}{2}}\right) \exp\left(\frac{z}{n+\frac{1}{2}}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{z^2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

d. In der Literatur findet man, dass $\cos(\pi z) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie damit, dass $\lim\limits_{n\to\infty} g_{n,n}(z) = \cos(\pi z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.

e. Stimmt es, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n,m\to\infty} \prod_{k=-m}^{n} \left(1 - \frac{z}{k+\frac{1}{2}}\right) = \cos(\pi z)?$$