

Notizen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen



G. Sweers

Wintersemester 18/19

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Modelle	1
1.2	Explizite Lösungen	4
1.2.1	Trennbar	5
1.2.2	Linear erster Ordnung	7
1.2.3	Homogen	7
1.2.4	Bernoulli und Riccati	8
1.2.5	Exakt	8
2	Erste Qualitative Überlegungen	11
2.1	Erster Ordnung	11
2.1.1	Richtungsfeld	11
2.1.2	Orthogonale Trajektorien	12
2.2	Lösungen mit mehr Regularität	14
2.3	Aus autonom folgt monoton	15
2.4	Vergleich von Lösungen	17
2.5	Eindeutigkeit	20
3	Gleichungen höherer Ordnung und Systeme	23
3.1	Gleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung	23
3.2	Lineare Gleichungen und Systeme	24
3.3	Eindeutigkeit für lineare Systeme	25
3.4	Formelle Lösungen linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten	26
3.4.1	Das reduzierte oder homogene Problem	27
3.4.2	Einige Eigenschaften des Exponenten einer Matrix	28
3.4.3	Das allgemeine Problem	29
3.5	Berechnung des Exponenten einer Matrix	30
4	Mehr Lineares, Stabilität	37
4.1	Lineare Gleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	37
4.2	Lineare Stabilität	40
4.3	Klassifizierung in zwei Dimensionen	43
4.3.1	Geometrische Zusammenhänge	44
5	Approximationen und Funktionenfolgen	47
5.1	Approximationen	47
5.2	Numerische Methoden zur Approximation	47
5.3	Analytische Methoden zur Approximation	51
5.3.1	Potenzreihen	51
5.3.2	Picard-Iteration	52

5.4	Funktionalanalytisches	54
5.4.1	Fixpunkte	54
5.4.2	Vektorraum, Banachraum	54
5.4.3	Folgen stetiger Funktionen	55
6	Existenz nach Picard-Lindelöf	59
6.1	Vorbereitung für den Existenzsatz	59
6.1.1	Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit	59
6.1.2	Ein Fixpunktsatz	59
6.2	Lokale Existenz	60
6.3	Globale Existenz	63
6.4	Das Lemma von Grönwall	66
6.4.1	Abschätzungen mit Grönwall	67
6.4.2	Stetigkeit bezüglich der Anfangswerte	69
6.4.3	Differentialgleichungen mit Existenzintervall \mathbb{R}	69
7	Nicht-lineare und linearisierte Systeme	71
7.1	Gleichgewichtspunkte	71
7.2	Linearisieren	75
7.3	Definition Stabilität für nicht-lineare Systeme	77
7.4	Stabilität von Gleichgewichtspunkten	78
8	Vergleich durch Linearisieren	81
8.1	Algebraische Vorbereitung zum Beweis des Stabilitätssatzes	81
8.1.1	Eine reelle alternative Jordan-Form	81
8.1.2	Ein passendes Skalarprodukt	83
8.1.3	Einige Beispiele	85
8.2	Der Beweis des Stabilitätssatzes	87
8.3	Linearisierungssatz	90
8.4	Abschätzungen	90
9	Lotka, Volterra und Lyapunov	93
9.1	Anwendungen in der Populationsdynamik	93
9.1.1	Das Räuber-Beute oder Lotka-Volterra Modell	93
9.1.2	Das kooperative Modell oder Mutualismus	95
9.1.3	Das Wettbewerbsmodell	96
9.2	Lyapunov	97
9.3	Systeme in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	101
10	Spezielles für zweite Ordnung	105
10.1	Phasenebene	105
10.2	Differentialgleichung für Trajektorien	106
10.3	Feder und Pendel	107
10.3.1	Reibung	110
11	Existenz nach Peano	113
11.1	Gleichmäßig und gleichgradig	113
11.2	Der Satz von Arzelà-Ascoli	114
11.3	Ein vereinfachter Existenzsatz	116
11.4	Existenz nach Peano	118

12 Randwertprobleme	123
12.1 Beispiele	123
12.2 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung	125
12.3 Sturmsche Randwertaufgaben	125
12.4 Greensche Funktion für die Sturmsche Randwertaufgabe	127
12.5 Regularität	131
12.6 Greensche Funktionen für mehr allgemeine lineare Randwertaufgaben . . .	132
13 Nicht-lineare Randwertprobleme	137
13.1 Lösungen durch Schießen	137
13.2 Lösungen zwischen Ober- und Unterlösungen	138
Literaturverzeichnis	145

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 1



Einführung

1.1 Modelle

Eine gewöhnliche Differentialgleichung gibt eine Relation zwischen einer unbekanntem Funktion und deren Ableitung(en). Nun kann man unendlich viele solcher Gleichungen aufschreiben. Um einigermaßen Struktur einzubringen, betrachtet man einfache Gleichungen, die helfen die auftretenden Phänomene zu verstehen. Andererseits betrachtet man auch Gleichungen, die ihre Bedeutung aufgrund der Anwendungen bekommen. Die Aufgabe eines Mathematikers ist es, aus der Differentialgleichung und den Nebenbedingungen, wie zum Beispiel Rand- oder Anfangswerte, die Eigenschaften der Lösungen herauszufinden. Eine Lösung ist zu verstehen als eine Funktion, welche die Gleichung und Nebenbedingung erfüllt. Nur relativ selten lässt sich eine explizite, geschlossene Formel für die Lösung(en) herleiten.

Bemerkung 1.0.1 *Differentialgleichungen bilden die Sprache für viele Prozesse aus der Physik, Mechanik, Biologie, Wirtschaft etc. Die Herleitung einer Gleichung, die einen derartigen Prozess beschreiben soll, ist ein Fach für sich. Das bedeutet nicht, dass diese Modellierung unabhängig ist von den mathematischen Grundlagen. Nur wenn die Lösung die Eigenschaften hat, die in der Anwendung beobachtet werden, kann das Modell richtig sein.*

Wir geben einige einfache Beispiele.

Beispiel 1.1 *Ein fallender Apfel:*

$$h''(t) = -g.$$

Die Gleichung trifft zu, wenn man die Reibung vernachlässigt und nur solange der Apfel den Boden nicht berührt. Zusätzliche Bedingungen sind, wenn man den Apfel am Zeitpunkt t_0 in Höhe $h_0 > 0$ fallen lässt: $h(t_0) = h_0$ und $h'(t_0) = 0$. Die Lösung zu diesem Anfangswertproblem ist leicht zu finden:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}g (t - t_0)^2.$$

Wenn der Boden die Höhe 0 hat, dann gilt $t \in [t_0, t_0 + \sqrt{2h_0/g}]$.

Beispiel 1.2 Ein Fahrzeug bei Vollbremsung:

$$x''(t) = -c \operatorname{sign}(x'(t)).$$

Auch hierzu gibt es Anfangswerte wie zum Beispiel: $x(0) = 0$ und $x'(0) = v_0$. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, hat man $x''(t) = -c$ und es folgt $x'(t) = v_0 - c t$ und $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}c t^2$. Für $t = t_1 := v_0/c$ gilt $x'(t_1) = 0$ und für $t > t_1$ kann man eigentlich nur $x'(t) = 0$ und $x(t) = v_0 t_1 - \frac{1}{2}c t_1^2 = \frac{1}{2}v_0^2/c$ als vernünftige Fortsetzung nehmen. Die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{1}{2}c t^2 & \text{für } t \in [0, t_1], \\ \frac{1}{2}v_0^2/c & \text{für } t > t_1, \end{cases}$$

ist nicht zweimal differenzierbar. Trotzdem möchte man sie als Lösung der Gleichung betrachten.

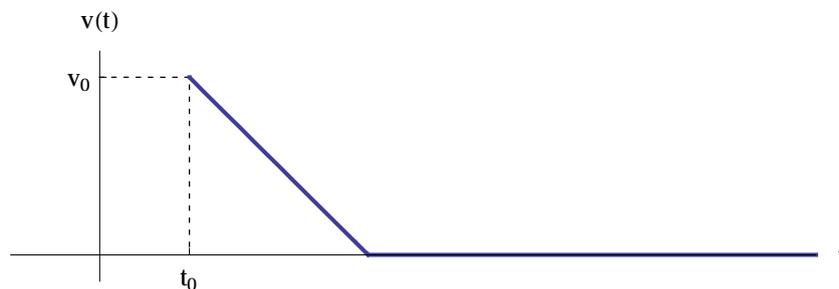


Abbildung 1.1: Profil der Geschwindigkeit $v(t)$ bei einer Vollbremsung. Beim „Knick“ ist v nicht differenzierbar, und x ist da nicht zweimal differenzierbar.

Beispiel 1.3 Lineares Wachstum:

$$y'(t) = c y(t).$$

Diese Differentialgleichung ist so ungefähr die einfachste. Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$y(t) = \alpha e^{c t} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

eine Lösung.

Beispiel 1.4 Die logistische Gleichung (Wachstum mit Beschränkung)

$$y'(x) = c y(x) (1 - y(x)).$$

Lösungen sind

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ y(x) &= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \alpha < 0 : y(x) &= \frac{e^{cx}}{e^{cx} - \alpha} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \alpha > 0 : y(x) &= \frac{e^{cx}}{e^{cx} - \alpha} && \text{für } x \in \left(\frac{1}{c} \ln \alpha, \infty\right), \\ \alpha > 0 : y(x) &= \frac{e^{cx}}{e^{cx} - \alpha} && \text{für } x \in \left(-\infty, \frac{1}{c} \ln \alpha\right). \end{aligned}$$

Es ist üblich als Lösung nur Funktionen zuzulassen, die auf einem Intervall definiert sind. Die letzten zwei Funktionen werden als unterschiedliche Lösungen betrachtet.

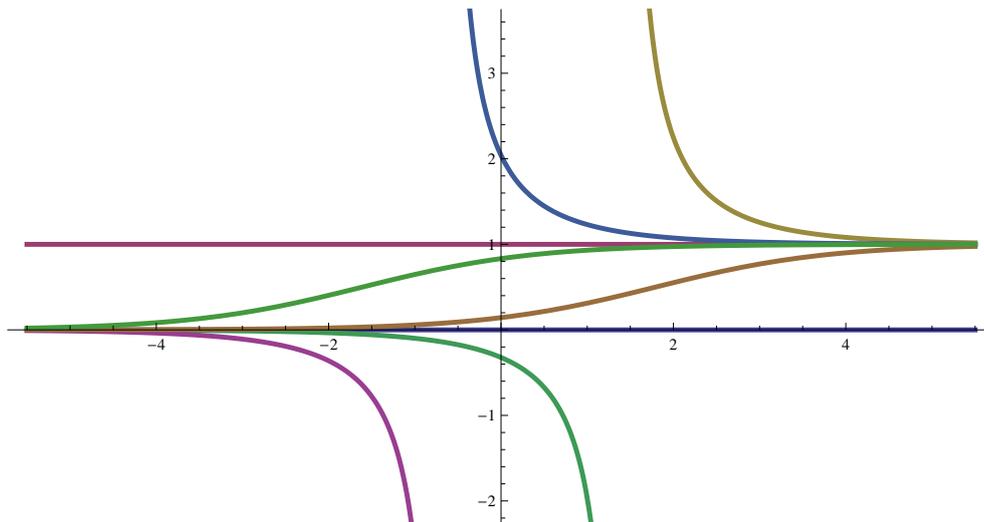


Abbildung 1.2: Skizze einiger Lösungen der logistischen Gleichung. Nur nicht-negative Lösungen entsprechen Größen, die physikalisch vernünftig sind.

Beispiel 1.5 Ein durchbiegender Balken:

$$\left(\frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{5/2}} \right)'' = f(x).$$

Nimmt man an, dass der Balken fast horizontal liegt, approximiert man das Modell mit der Vereinfachung

$$y''''(x) = f(x).$$

Hier ist f die Kraftdichte und y die Auslenkung. Ist der Balken eingemauert an den Stellen 0 und ℓ , dann hat man als Randbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y(\ell) = y'(\ell) = 0.$$

Liegt der Balken an beiden Seiten auf, dann passt

$$y(0) = y''(0) = y(\ell) = y''(\ell) = 0.$$

Ist es ein Springbrett im Schwimmbad, dann hat man

$$y(0) = y'(0) = y''(\ell) = y'''(\ell) = 0.$$

Beispiel 1.6 Wasser in einem Eimer mit Loch:

$$h'(t) = -c\sqrt{h(t)}. \quad (1.1)$$

Das Gesetz von Torricelli besagt, dass die Geschwindigkeit, mit der das Wasser herausströmt, proportional zur Quadratwurzel der Höhe ist: $vol'(t) = -c_1\sqrt{h(t)}$. Hier ist $vol(t)$ das Volumen des Wassers. Wenn man den Eimer als Zylinder betrachtet mit Radius r , dann gilt für das Volumen $vol(t) = \pi r^2 h(t)$, und die Gleichung folgt mit $c = c_1 r^{-2}/\pi$.

Man findet die Lösungen

$$h(t) = \begin{cases} (\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}c(t - t_0))^2 & \text{für } t \in [t_0, t_0 + \frac{2}{c}\sqrt{h_0}], \\ 0 & \text{für } t \in (t_0 + \frac{2}{c}\sqrt{h_0}, \infty). \end{cases}$$

Auch $h(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung.

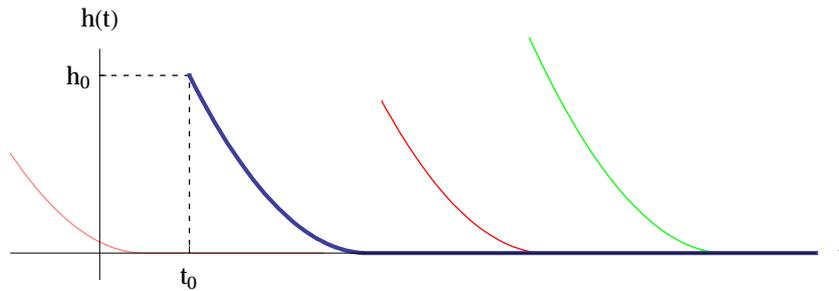


Abbildung 1.3: Skizze zu Beispiel 1.6. In endlicher Zeit ist der Eimer leer. Zwei Lösungen sind identisch für t genügend groß.

Beispiel 1.7 Die Lösungen von

$$k'(t) = -c k(t) \quad (1.2)$$

sind $k(t) = k_0 e^{-c(t-t_0)}$. Wenn man nun vergleicht mit dem letzten Beispiel, dann soll einem auffallen, dass wenn man $(t_1, k(t_1))$ kennt, man die Vergangenheit konstruieren kann. Die Differentialgleichung ist in positiver und negativer Zeitrichtung eindeutig lösbar. Die Lösungen von (1.1) sind es nicht.

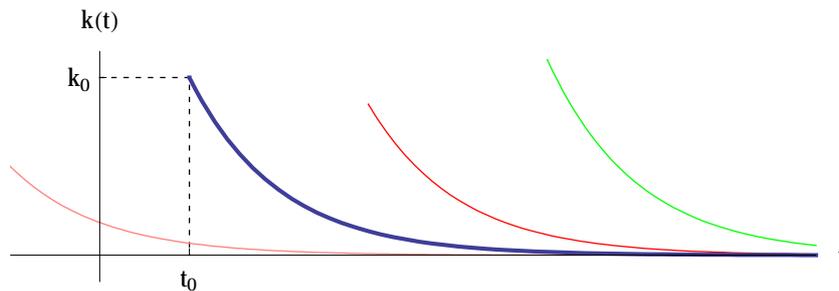


Abbildung 1.4: Skizze zu Beispiel 1.7. Wenn positiv gestartet wird, wird die Lösung zwar klein aber nie gleich 0. Unterschiedliche Lösungen treffen sich nicht.

1.2 Explizite Lösungen

Erstens definieren wir eine Lösung.

Definition 1.8 Sei $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und sei $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$. Eine **Lösung** vom Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(\cdot, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

ist eine stetige Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, bei dem I ein nicht-leeres Intervall ist mit $x_0 \in I \subset [a, b]$. Die Funktion y erfüllt außerdem:

1. $y(x_0) = y_0 \in y(I) \subset [c, d]$, und

2. y ist auf I differenzierbar und $y'(x) = f(x, y(x))$ für $x \in I$ mit Ausnahme von höchstens isolierten Stellen.

I heißt das **Existenzintervall der Lösung**. Das größtmögliche Existenzintervall nennt man das **maximale Existenzintervall der Lösung**.

Bemerkung 1.8.1 Wenn f stetig ist, kann man zeigen, dass eine Lösung stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung für jedes $x \in I^\circ$ erfüllt ist.

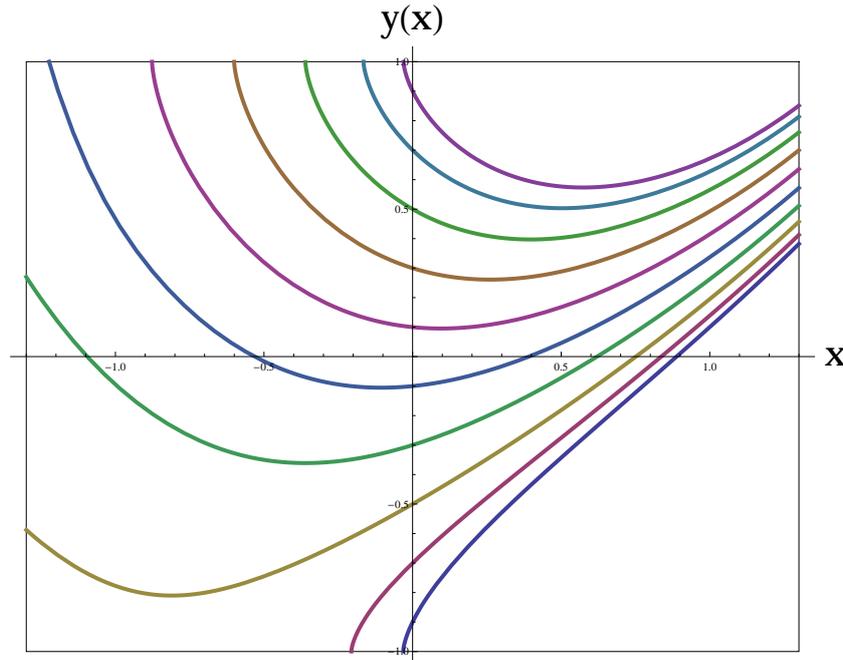


Abbildung 1.5: Skizze zu einigen Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{x-y(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}}$ auf $[-1.3, 1.3] \times [-1, 1]$. Die zugehörigen Existenzintervalle liegen meistens strikt innerhalb von $[-1.3, 1.3]$.

Wir stellen einige der explizit lösbaren Typen von Gewöhnlichen Differentialgleichungen vor.

1.2.1 Trennbar

Definition 1.9 Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(x(t))g(t)$$

heißt **trennbar**.

Trennbar wird auch separierbar genannt.

Algorithmus 1.10 [Für die Lösung einer trennbaren Dgl.]

0. Nullstellen von f sind konstante Lösungen:

Wenn $f(x_0) = 0$, dann ist $x(t) = x_0$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

1. Wenn $f(x_0) \neq 0$ trennt man durch

$$\frac{1}{f(x(t))} x'(t) = g(t).$$

2. Formale Integration und Substitution $x = x(s)$:

$$\int^{x(t)} \frac{1}{f(x)} dx = \int^t \frac{1}{f(x(s))} x'(s) ds = \int^t g(s) ds.$$

3. Man suche eine Stammfunktion¹ H zu $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ und eine Stammfunktion G zu $s \mapsto g(s)$ und es folgt

$$H(x(t)) = G(t) + c$$

mit c eine Konstante.

4. Wenn möglich invertiert man H :

$$x(t) = H^{\text{inv}}(G(t) + c)$$

Die Lösung ist erst komplett, wenn auch das Existenzintervall gegeben wird.

Beispiel 1.11 Man finde die Lösungen zu

$$y'(x) = 1 + y(x)^2.$$

Diese Differentialgleichung ist trennbar, denn man kann sie schreiben als

$$\frac{1}{1 + y(x)^2} y'(x) = 1.$$

Stammfunktionen zu $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ und $x \mapsto 1$ ergeben

$$\arctan(y(x)) = x + c$$

und nach invertieren folgen die Lösungen für $c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \tan(x + c).$$

Die zugehörigen Existenz-Intervalle findet man durch $x + c = \pm \frac{1}{2}\pi$:

$$x \in \left(-\frac{1}{2}\pi - c, \frac{1}{2}\pi - c \right).$$

¹„Stammfunktionen finden“ ist eine Arbeit, die Computer-Algebra Programme wie Maple oder Mathematica sehr schnell ausführen können. Das heißt, wenn es eine explizite Stammfunktion gibt, dann wird sie schnell gefunden. Mathematica hat sogar eine online Integrator: <http://integrals.wolfram.com/>

1.2.2 Linear erster Ordnung

Definition 1.12 Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(t) x(t) + g(t)$$

heißt *linear erster Ordnung*.

Algorithmus 1.13 [Für die Lösung einer linearen Dgl. erster Ordnung]

1. Man löst die reduzierte Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t) x(t).$$

Diese ist trennbar und die Lösungen sind $x(t) = C e^{F(t)}$ mit $C \in \mathbb{R}$ und F eine Stammfunktion von f .

2. Man substituiert $x(t) = C(t) e^{F(t)}$ (dieser Trick heißt Variation der Konstanten). Die Differentialgleichung wird

$$C'(t) e^{F(t)} + C(t) e^{F(t)} f(t) = f(t) C(t) e^{F(t)} + g(t).$$

und vereinfacht zu $C'(t) = g(t) e^{-F(t)}$.

3. Man suche eine Stammfunktion

$$C(t) = c + \int_{t_0}^t g(s) e^{-F(s)} ds.$$

4. Die Lösung wird

$$x(t) = \left(c + \int_{t_0}^t g(s) e^{-F(s)} ds \right) e^{F(t)}.$$

1.2.3 Homogen

Definition 1.14 Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

heißt *homogen*.

Algorithmus 1.15 [Für die Lösung einer homogenen Dgl.]

1. Man substituiert $u(t) = x(t)/t$ und findet

$$t u'(t) + u(t) = f(u(t)).$$

2. Diese Differentialgleichung lässt sich trennen,

$$u'(t) = (f(u(t)) - u(t)) \frac{1}{t},$$

und wird weiter als trennbar gelöst.

3. Nach lösen $u(t)$ wieder ersetzen durch $x(t)/t$, das heißt

$$x(t) = t u(t).$$

1.2.4 Bernoulli und Riccati

Definition 1.16 Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(t) x(t) + g(t) x(t)^m$$

mit $m \notin \{0, 1\}$ ist nach **Bernoulli** benannt.

Algorithmus 1.17 [Für die Lösung einer Dgl. von Bernoulli]

1. Man substituiert $x(t) = u(t)^\alpha$, findet

$$\alpha u'(t)u(t)^{\alpha-1} = f(t) u(t)^\alpha + g(t) u(t)^{\alpha m},$$

und vereinfacht zu

$$\alpha u'(t) = f(t) u(t) + g(t) u(t)^{\alpha(m-1)+1}.$$

2. Nimmt man $\alpha(m-1)+1 = 0$ wird die Differentialgleichung linear erster Ordnung.

Definition 1.18 Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = h(t) + f(t) x(t) + g(t) x(t)^2$$

ist nach **Riccati** benannt.

Algorithmus 1.19 [Für die Lösung einer Dgl von Riccati]

1. Diese Differentialgleichung kann man explizit lösen, wenn man das Glück hat, eine spezielle Lösung zu sehen. Sei $\tilde{x}(t)$ diese eine Lösung. Man substituiere $x(t) = \tilde{x}(t) + y(t)$ und finde

$$\tilde{x}'(t) + y'(t) = h(t) + f(t) (\tilde{x}(t) + y(t)) + g(t) (\tilde{x}(t) + y(t))^2$$

und weil \tilde{x} eine Lösung ist, folgt nach Vereinfachung

2. eine Bernoulli Differentialgleichung:

$$y'(t) = (2g(t) \tilde{x}(t) + f(t)) y(t) + g(t) y(t)^2.$$

1.2.5 Exakt

Definition 1.20 Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d}{dt} F(x(t), t) = 0$$

heißt **exakt**.

Eine solche Differentialgleichung hat also die Form

$$\partial_1 F(x(t), t) x'(t) + \partial_2 F(x(t), t) = 0.$$

Man sieht nicht F sondern die beiden partiellen Ableitungen.

Algorithmus 1.21 [Für die Lösung einer exakten Dgl.]

1. Lösungen sind $F(x(t), t) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.
2. Wenn möglich, löse man $x(t)$.

Das Problem bei exakten Differentialgleichungen ist, wie man sie erkennt. Man bekommt sie selten in der Form wie oben, sondern hat eine Gleichung wie

$$G(x(t), t) x'(t) + H(x(t), t) = 0. \quad (1.3)$$

Lemma 1.22 (eine notwendige Bedingung für eine exakte Dgl.) Nehme an, dass G und H stetig differenzierbar sind. Wenn die Differentialgleichung (1.3) exakt ist, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} H(x, t). \quad (1.4)$$

Beweis. Es soll gelten

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = G(x, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = H(x, t).$$

Sind die Funktionen G und H stetig differenzierbar, dann folgt mit dem Vertauschungssatz von Schwarz, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} H(x, t). \quad (1.5)$$

■

Ist das Gebiet einfach zusammenhängend, dann kann man zeigen, dass (1.4) nicht nur notwendig sondern auch ausreichend für die Exaktheit ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, dann findet man $F(x, t)$ als eine Stammfunktion von $x \mapsto G(x, t)$:

$$F(x, t) = \int^x G(\xi, t) d\xi + C(t).$$

Die Funktion C findet man durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int^x G(\xi, t) d\xi \right) + C'(t) = H(x, t).$$

Wenn eine Differentialgleichung nicht exakt ist, kann man versuchen, sie exakt zu machen, indem man sie mit einer geschickt gewählten Funktion multipliziert. So eine geschickt gewählte Funktion nennt man **integrierenden Faktor**. Die Suche nach einer solchen Funktion ohne zusätzliche Ideen ist oft hoffnungslos. Versucht man nämlich für (1.3) einen integrierenden Faktor $\mu(x, t)$ zu finden, dann soll nach (1.5) gelten, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu(x, t) G(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, t) H(x, t))$$

und das wird

$$\mu_t G + \mu G_t = \mu_x H + \mu H_x.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung und das bringt einen meistens „vom Regen in die Traufe“.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 2

Erste Qualitative Überlegungen



2.1 Erster Ordnung

Die expliziten Methoden der letzten Woche hatten alle Differentialgleichungen erster Ordnung im Visier.

Definition 2.1 Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist die Zahl der höchsten Ableitung.

Beispiel 2.2 Die Differentialgleichung $x'' = -c \operatorname{sign}(x')$ hat Ordnung 2. Wenn man jedoch $v = x'$ setzt, findet man $v' = -c \operatorname{sign}(v)$ mit Ordnung 1.

Für Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es einige spezielle Methoden, um auf eine Idee zu kommen, wie die Lösungen ausfallen. Viele Überlegungen fangen an, indem man versucht sich eine graphische Vorstellung zu machen.

2.1.1 Richtungsfeld

Definition 2.3 Betrachten wir die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (2.1)$$

mit f eine Funktion von $R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Das **Richtungsfeld** für diese Differentialgleichung ist definiert durch $v : R \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Das Richtungsfeld ist ein Vektorfeld und dieses Vektorfeld ist derartig, dass eine Lösung der Differentialgleichung mit $y(x_0) = y_0$ an der Stelle x_0 genau $v(x_0, y_0)$ als Tangentialrichtung hat. Anders gesagt: man kann eine Skizze einer Lösung anfertigen, indem man die Vektoren vom Vektorfeld verfolgt.

Beispiel 2.4 Die Differentialgleichung $y'(x) = \frac{(x^2-y)y(2-y)}{1+x^2+y^2}$ kann man höchstwahrscheinlich nicht mit einer expliziten Formel lösen. Wenn man das Richtungsfeld anschaut, kann man vermuten, dass die Lösung mit $y(0) = 1$ ganz \mathbb{R} als Existenzintervall hat und dass außerdem gilt $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$. Eine Lösung mit $y(1) = -1$ scheint eher ein Existenzintervall vom Typ $(-\infty, T)$ zu haben.

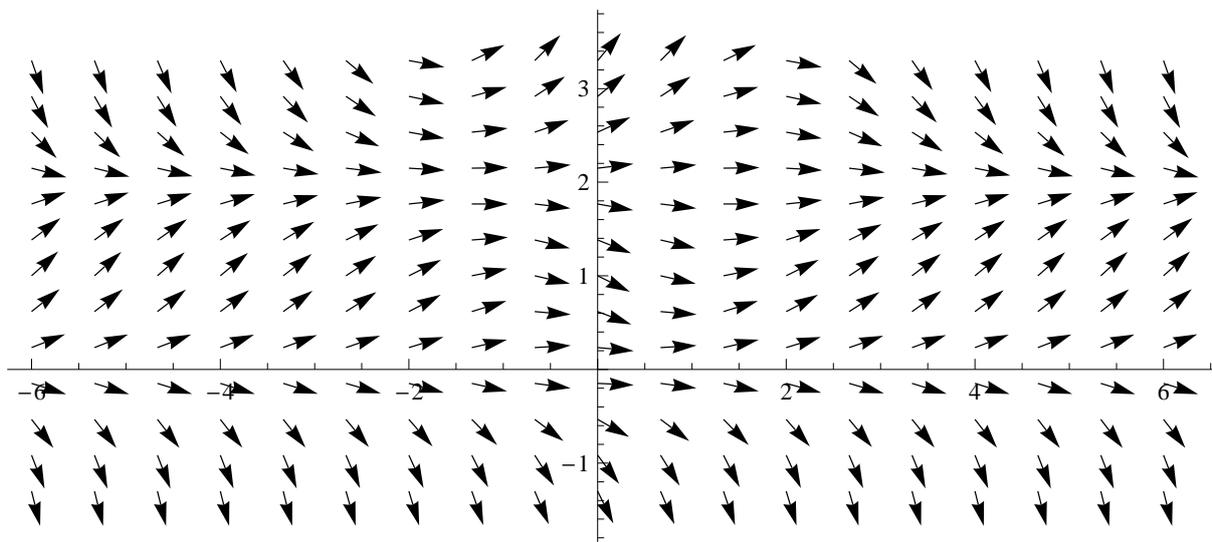


Abbildung 2.1: Das Vektorfeld aus Beispiel 2.4. Aus praktischen Gründen sind die Vektoren normalisiert, das heißt, statt v ist $v/\|v\|$ eingezeichnet.

2.1.2 Orthogonale Trajektorien

Differentialgleichung für eine Kurvenschar Eine Kurvenschar in \mathbb{R}^2 ist eine Familie von Kurven¹, die ein Gebiet überdecken. So eine Kurvenschar ist zum Beispiel $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = cx^2\}_{c \in \mathbb{R}}$, die Familie aller Parabeln mit Minimum/Maximum in $(0, 0)$ inklusive die x -Achse. Diese Kurvenschar hat die besondere Eigenschaft, dass $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ eindeutig überdeckt wird: durch jeden Punkt (x, y) mit $x \neq 0$ geht genau eine Kurve. In diesem Fall werden die Kurven parametrisiert durch

$$y = y_c(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

und $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $y_c(x) = cx^2$. Schreibt man dies als

$$\frac{y_c(x)}{x^2} = c,$$

dann sieht man, dass diese Kurven die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)}{x^2} \right) = 0.$$

Diese exakte Differentialgleichung kann man auch schreiben als

$$\frac{y'(x)}{x^2} - 2\frac{y(x)}{x^3} = 0$$

oder als

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x).$$

¹Eine Kurve in \mathbb{R}^2 kann man auffassen als eine Abbildung $k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit I ein Intervall in \mathbb{R} und k eine stetige Funktion. Oft wird auch nur die Bildmenge $\{k(t); t \in I\}$ als Kurve benannt.

Orthogonale Kurvenschar Wenn man eine derartige Kurvenschar hat, kann man sich fragen, ob es möglich ist, eine zweite Kurvenschar zu finden, deren Kurven die aus der ersten Familie senkrecht schneiden.

Sei nun die Kurvenschar gegeben durch

$$f(x, y) = c.$$

Wenn man $x \mapsto y(x)$ lokal so eine Kurve beschreiben lässt, also $f(x, y(x)) = c$, dann folgt

$$0 = \frac{d}{dx} (f(x, y(x))) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y(x)) y'(x) \quad (2.2)$$

Parametrisieren wir die senkrecht schneidenden Kurven durch $x \mapsto Y(x)$, dann gilt, wenn $y = y(x)$ und $y = Y(x)$ sich schneiden in (x, y) , dass

$$y(x) = y = Y(x)$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Y'(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Diese letzte Gleichung liefert $y'(x) = \frac{-1}{Y'(x)}$ und besagt, dass die betreffenden Tangentialvektoren senkrecht aufeinander stehen. Kombinieren wir die letzten 3 Gleichungen, so folgt

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, Y(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, Y(x)) \frac{-1}{Y'(x)}$$

oder anders geschrieben:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, Y(x)) Y'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, Y(x)).$$

Definition 2.5 Sei $\mathcal{F} = \{(x, y); f(x, y) = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ eine Kurvenschar, die \mathbb{R}^2 (oder einen Teil von \mathbb{R}^2) überdeckt. Man nennt die Kurvenschar $\mathcal{G} = \{(x, y); g(x, y) = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ die Familie der **orthogonalen Trajektorien** zu \mathcal{F} , wenn die Kurven aus \mathcal{G} die aus \mathcal{F} senkrecht schneiden.

Beispiel 2.6 Wir suchen die **orthogonalen Trajektorien** zu $\{(x, y); y = ce^{2x}\}_{c \in \mathbb{R}}$.

1. Man löse nach c :

$$ye^{-2x} = c.$$

2. Man nehme an, $y = y(x)$ (oder $x = x(y)$) und schreibe die Differentialgleichung für diese Kurven:

$$0 = \frac{d}{dx} (y(x)e^{-2x}) = y'(x)e^{-2x} - 2y(x)e^{-2x}.$$

3. Man ersetze $y(x)$ durch $Y(x)$ und $y'(x)$ durch $-1/Y'(x)$:

$$0 = \frac{-1}{Y'(x)} e^{-2x} - 2Y(x)e^{-2x}.$$

4. Man löst

$$2Y(x)Y'(x) = -1$$

und findet

$$Y(x)^2 = c - x.$$

Die orthogonalen Trajektorien sind $\{(x, y); y^2 + x = c\}_{c \in \mathbb{R}}$.

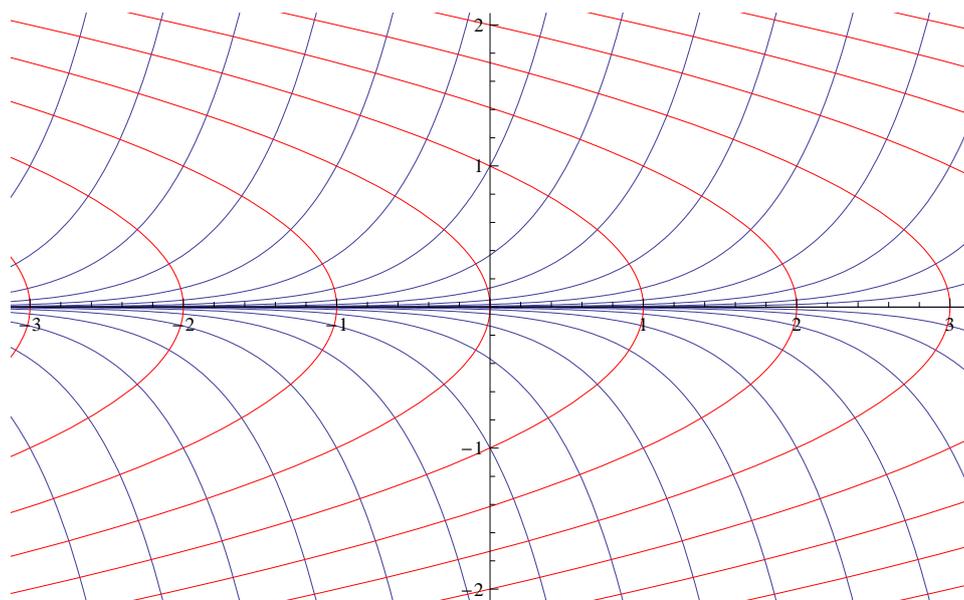


Abbildung 2.2: In Blau die Kurven $F = \{y = ce^{2x}\}_{c \in \mathbb{R}}$; in Rot $G = \{y^2 + x = c\}_{c \in \mathbb{R}}$. Siehe Beispiel 2.6.

2.2 Lösungen mit mehr Regularität

Mit der Regularität einer Funktion ist gemeint, wie oft sie differenzierbar ist. Um Differentialgleichungen

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (2.3)$$

betrachten zu können, bei denen f nicht unbedingt stetig sein muss, haben wir Lösungen definiert als stetige Funktionen, die mit Ausnahme von isolierten Stellen differenzierbar sind und die Differentialgleichung erfüllen.

Lemma 2.7 Für (2.3) gilt folgendes:

- Wenn f stetig ist, dann ist jede Lösung y stetig differenzierbar.
- Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Wenn f stetige n -te Ableitungen hat, hat jede Lösung y stetige $(n + 1)$ -te Ableitungen.

Beweis. Sei f stetig und $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung. Nennen wir die isolierten Ausnahmestellen A . Wenn $(c, d) \cap A = \emptyset$, dann ist $x \mapsto f(x, y(x))$ eine stetige Funktion als Zusammensetzung stetiger Funktionen und ist $x \mapsto y'(x)$ stetig, das heißt, y ist stetig differenzierbar auf (c, d) .

Wenn $a_i \in A$ dann gilt

$$y'_r(a_i) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{y(a_i + h) - y(a_i)}{h}.$$

Weil die Funktion y stetig ist auf $[a_i, a_i + \varepsilon]$ und differenzierbar in $(a_i, a_i + \varepsilon)$, liefert der Mittelwertsatz, dass es $\xi \in (a_i, a_i + h)$ gibt mit

$$\frac{y(a_i + h) - y(a_i)}{h} = y'(\xi) = f(\xi, y(\xi)).$$

Weil $\lim_{\xi \rightarrow a_i} f(\xi, y(\xi)) = f(a_i, y(a_i))$ gilt, existiert die rechte Ableitung von y in a_i . Ähnlich existiert auch die linke Ableitung und weil sie gleich sind, existiert $y'(a_i)$ und es gilt sogar

$$y'(a_i) = f(a_i, y(a_i)),$$

ein Widerspruch zu der Annahme, dass a_i eine Ausnahmestelle war.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion nach n . ■

2.3 Aus autonom folgt monoton

Betrachten wir die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung $y'(x) = f(x, y(x))$.

Definition 2.8 Die Differentialgleichung (2.3) heißt **autonom**, wenn $f(x, y)$ unabhängig von x ist, also

$$y'(x) = f(y(x)).$$

Lemma 2.9 Stückweise stetig differenzierbare Lösungen² einer autonomen Differentialgleichung erster Ordnung sind monoton.

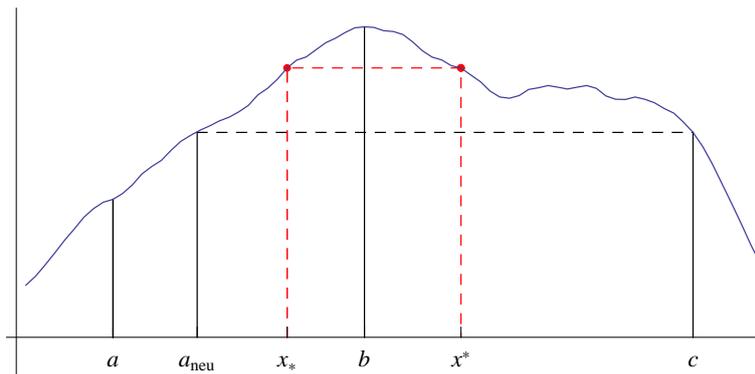


Abbildung 2.3: Wir zeigen, dass der Graph der Lösung einer autonomen Differentialgleichung erster Ordnung so nicht sein kann.

Sei $x \mapsto y(x) : (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht monotone Lösung von $y'(x) = f(y(x))$. Wenn man annimmt, dass y ein Maximum im Innern hat, sagen wir in b (es könnte auch ein Minimum sein), dann lässt Abbildung 2.3 vermuten, dass es $x_* \in (a, b)$ und $x^* \in (b, c)$ gibt derart, dass $y(x_*) = y(x^*)$ und $y'(x_*) > 0 > y'(x^*)$. Der Widerspruch würde folgen aus der Differentialgleichung:

$$0 < y'(x_*) = f(y(x_*)) = f(y(x^*)) = y'(x^*) < 0. \quad (2.4)$$

Der Beweis ist leider etwas kompliziert, da die Differentialgleichung nicht an jeder Stelle erfüllt sein muss und die Ungleichungen in (2.4) ja auch Gleichungen sein könnten.

²Eine stetige Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn man $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle aufteilen kann:

$$[a, b] = [a = a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_k, a_{k+1} = b]$$

und auf jedem dieser Teilintervalle $[a_i, a_{i+1}]$ gibt es eine stetige Funktion g_i mit $g_i = h'$ auf (a_i, a_{i+1}) .

Beweis. Wir nehmen an, y hat ein Maximum in b innerhalb von I . Bei einem Minimum kann man ähnlich argumentieren. Es gibt $a, b, c \in I$ mit $a < b < c$ mit $\max(y(a), y(c)) \leq y(b)$.

1) Im ersten Schritt suchen wir zwei Stellen $a_0 < c_0$ mit $y(a_0) = y(c_0)$. Wenn $\max(y(a), y(c)) = y(b)$ gilt, sind wir fertig. Also nehmen wir an, $\max(y(a), y(c)) < y(b)$. Wir benutzen die Stetigkeit und den Zwischenwertsatz. Wenn $y(a) < y(c)$, dann gibt es $a_0 \in (a, b)$ mit $y(a_0) = y(c)$ und wir setzen $c_0 = c$. Wenn $y(a) > y(c)$, dann gibt es $c_0 \in (b, c)$ mit $y(a) = y(c_0)$ und wir setzen $a_0 = a$.

2) Wir haben erlaubt, dass eine Lösung isolierte Stellen hat, an denen die Differentialgleichung nicht erfüllt ist. Wir wollen solche Problemstellen vermeiden. Das heißt, statt

$$\{(a_0, b), (b, c_0)\} \text{ mit } y(a_0) = y(c_0) < y(b) \text{ und} \\ \text{mit möglichen Problemstellen in } (a_0, b) \cup (b, c_0),$$

suchen wir

$$\{(a_*, b_*), (b^*, c^*)\} \text{ mit } y(a_*) = y(c^*) < y(b_*) = y(b^*) \text{ und} \\ \text{ohne mögliche Problemstellen in } (a_*, b_*) \cup (b^*, c^*).$$

Weil $[a_0, c_0]$ beschränkt ist, kann das Paar $\{(a_0, b), (b, c_0)\}$ höchstens endlich viele solche Problemstellen haben. Der Zwischenwertsatz erlaubt es uns $a_1 \in (a_0, b)$ und $c_1 \in (b, c_0)$ zu finden derart, dass

$$y(a_1) = y(c_1) = \frac{y(a) + y(b)}{2}.$$

Jetzt betrachten wir entweder das Paar $\{(a_0, a_1), (c_1, c_0)\}$ oder $\{(a_1, b), (b, c_1)\}$. Mindestens einer der beiden enthält eine solche isolierte Stelle weniger. Die Werte von y am Rand dieser Intervalle sind so wie gewünscht. Dieses Aufteilen können wir so oft wiederholen, bis wir Intervalle (a_*, b_*) und (b^*, c^*) gefunden haben, die keine Stelle enthalten, an der y nicht differenzierbar ist. Die Konstruktion ist so, dass

$$y(a_*) = y(c^*) < y(b_*) = y(b^*)$$

noch erfüllt ist.

3) Der Mittelwertsatz ergibt ein $x_* \in [a_*, b_*]$ mit

$$y'(x_*) = \frac{y(b_*) - y(a_*)}{b_* - a_*} > 0.$$

Benutzen wir wiederum den Zwischenwertsatz um eine Lösung von $y(x_*) = y(x^*)$ mit $x^* \in [b^*, c^*]$ zu finden, und nehmen wir das maximale x^* . Es gibt ein größtes x^* , denn sonst gäbe es eine wachsende Folge solcher Lösungen $x_1^* < x_2^* < \dots < c^*$ und diese Folge würde konvergieren: $x_n^* \uparrow x_\infty^* \leq c^*$. Aus der Stetigkeit von y würde $y(x_\infty^*) = y(x_*)$ folgen. Dann wäre x_∞^* das größte x^* und dies ist ein Widerspruch. Weil man also x^* maximal nehmen kann und auch nimmt, gilt für $x > x^*$, dass $y(x) < y(x^*)$, und so folgt

$$y'(x^*) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{y(x^* + h) - y(x^*)}{h} \leq 0.$$

4) Die Differentialgleichung liefert

$$0 < y'(x_*) = f(y(x_*)) = f(y(x^*)) = y'(x^*) \leq 0,$$

einen Widerspruch. ■

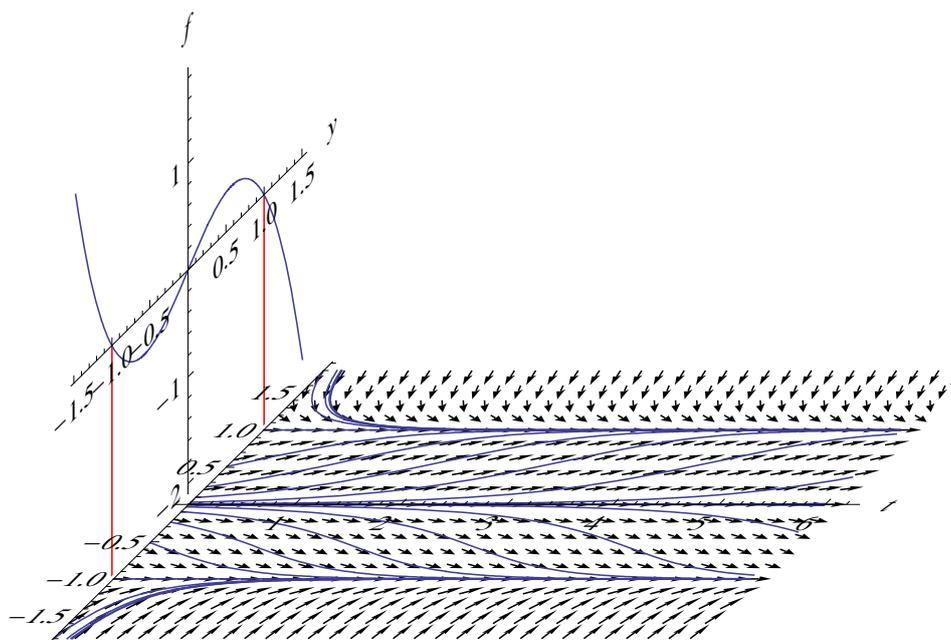


Abbildung 2.4: Bild zu Beispiel 2.10. Ein Versuch, die Funktion $y \mapsto f(y)$, das Richtungsfeld und einige Lösungen $t \mapsto y(t)$ von $y' = f(y)$ in einem Bild darzustellen.

Beispiel 2.10 Betrachten wir die autonome Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t)^2).$$

Die Funktion $f(y) = y(1 - y^2)$ ist positiv für $y \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ und negativ für $y \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$. Das bedeutet, dass Lösungen mit Werten in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ steigen und mit Werten in $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ fallen. Siehe auch Abbildung 2.4.

2.4 Vergleich von Lösungen

Wir haben einige Sorten Differentialgleichungen erster Ordnung gesehen, die explizite Lösungsverfahren haben. Die meisten kann man aber nicht explizit lösen. Man kann aber versuchen, nicht-explizit-lösbare mit explizit-lösbaren Differentialgleichungen zu vergleichen.

Beispiel 2.11 Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x(t)^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung ist leider nicht lösbar mit den elementaren Funktionen, denen man in Analysis 1 oder 2 begegnet ist. Man kann versuchen die Lösung zu vergleichen mit der Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = t^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Wenn eine Lösung $t \mapsto x(t)$ existiert, dann gilt $t^2 \leq t^2 + x(t)^2$ und so auch $y'(t) \leq x'(t)$. Dann gilt auch

$$(x(t) - y(t)) - (x(0) - y(0)) = \int_0^t (x'(s) - y'(s)) ds \geq 0 \text{ für } t \geq 0$$

und es folgt

$$x(t) \geq y(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

Es folgt (wenn $x(1)$ existiert), dass $x(1) \geq \frac{1}{3}$.

Als nächstes vergleichen wir mit

$$\begin{cases} z'(t) = 1 + z(t)^2, \\ z(1) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Für $t \geq 1$ und $x(t) \geq z(t)$ gilt

$$t^2 + x(t)^2 \geq 1 + z(t)^2$$

und es folgt $x'(t) \geq z'(t)$. Das würde bedeuten, dass x schneller wächst als z und also auch, dass $x \geq z$ erhalten bleibt. Diese Schlussfolgerung scheint etwas von einem Zirkelschluss zu haben.

In dem folgenden Satz betrachten wir die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Theorem 2.12 Nehme an es gibt Lösungen $x, y : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ von (2.5), die stückweise stetig differenzierbar sind. Seien f und g derartig, dass es $L \geq 0$ gibt mit

$$f(t, \xi) - g(t, \eta) \geq -L |\xi - \eta| \quad \text{für } t \in [0, a) \text{ und } \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Wenn $x_0 > y_0$, dann gilt

$$x(t) > y(t) \quad \text{für } t \in [0, a).$$

Wenn $x_0 \geq y_0$, dann gilt

$$x(t) \geq y(t) \quad \text{für } t \in [0, a).$$

Bemerkung 2.12.1 Schaut man den Beweis an, dann sieht man, dass es reicht, wenn wir annehmen, dass f und g die folgende Bedingung erfüllen: Für jedes Intervall $[-M, M]$ gibt es $L_M \in \mathbb{R}$ mit

$$f(t, \xi) - g(t, \eta) \geq -L_M |\xi - \eta| \quad \text{für } t \in [0, a) \text{ und } \xi, \eta \in [-M, M].$$

Beweis. Nehmen wir an $x_0 > y_0$. Wenn $x - y$ eine Nullstelle in $[0, a)$ hat, hat sie, weil x und y stetige Funktionen sind, eine kleinste positive Nullstelle, die wir t_0 nennen werden. Für $t \in [0, t_0]$ gilt, mit möglicher Ausnahme von isolierten Stellen, dass

$$x'(t) - y'(t) = f(t, x(t)) - g(t, y(t)) \geq -L(x(t) - y(t))$$

und so auch

$$\frac{d}{dt} (e^{Lt} (x(t) - y(t))) = e^{Lt} ((x'(t) - y'(t)) + L(x(t) - y(t))) \geq 0.$$

Das liefert uns

$$\begin{aligned} & e^{Lt_0} (x(t_0) - y(t_0)) - (x_0 - y_0) = \\ & = [e^{Lt} (x(t) - y(t))]_{t=0}^{t_0} = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} (e^{Lt} (x(t) - y(t))) dt \geq 0. \end{aligned}$$

An isolierten Stellen, wo $x - y$ nicht differenzierbar ist, kommt man mit Hilfe der Stetigkeit vorbei an einer solchen Stelle. Wir finden

$$x(t_0) - y(t_0) = e^{-Lt_0} (x_0 - y_0) > 0,$$

einen Widerspruch.

Nun der Fall $x_0 = y_0$. Wenn es $t_1 \in [0, a)$ gibt mit $x(t_1) < y(t_1)$, dann gibt es ein Intervall $[t_0, t_1] \subset [0, t_1]$ mit $x(t_0) = y(t_0)$ und

$$x(t) < y(t) \text{ für } t \in (t_0, t_1].$$

In diesem Intervall gilt

$$x'(t) - y'(t) = f(t, x(t)) - g(t, y(t)) \geq -L(y(t) - x(t))$$

und so auch

$$\frac{d}{dt} (e^{-Lt} (x(t) - y(t))) = e^{-Lt} ((x'(t) - y'(t)) - L(x(t) - y(t))) \geq 0.$$

Das liefert uns

$$\begin{aligned} e^{-Lt_1} (x(t_1) - y(t_1)) &= e^{-Lt_1} (x(t_1) - y(t_1)) - e^{-Lt_0} (x(t_0) - y(t_0)) = \\ &= [e^{-Lt} (x(t) - y(t))]_{t=t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (e^{-Lt} (x(t) - y(t))) dt \geq 0, \end{aligned}$$

und wiederum einen Widerspruch. ■

Die Bedingung in (2.6) scheint vielleicht etwas mühsam. Einen Hinweis, wie man so etwas beweist, liefert die folgende Überlegung:

$$f(t, \xi) - g(t, \eta) = f(t, \xi) - f(t, \eta) + f(t, \eta) - g(t, \eta).$$

- Wenn f stetig differenzierbar ist, kann man $f(t, \xi) - f(t, \eta)$ abschätzen:

$$f(t, \xi) - f(t, \eta) = \frac{f(t, \xi) - f(t, \eta)}{\xi - \eta} (\xi - \eta) \geq -L |\xi - \eta|,$$

wenn man

$$L = \max_{y \in [-M, M]} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$$

setzt. Der Mittelwertsatz sagt aus: es gibt $y \in (\xi, \eta)$ mit

$$\frac{f(t, \xi) - f(t, \eta)}{\xi - \eta} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y).$$

- Die zweite Hälfte kann man direkt vergleichen, da wir nur noch mit t und η zu tun haben.

Diese Beobachtungen führen zum folgenden Ergebnis:

Korollar 2.13 Nehme an, es gibt Lösungen $x, y : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ von (2.5), die stückweise stetig differenzierbar sind. Wenn entweder f oder g stetig differenzierbar ist und wenn außerdem gilt

$$f(t, \eta) \geq g(t, \eta) \text{ für } t \in [0, a) \text{ und } \eta \in \mathbb{R},$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} x_0 > y_0 &\implies x(t) > y(t) \text{ für alle } t \in [0, a), \\ x_0 \geq y_0 &\implies x(t) \geq y(t) \text{ für alle } t \in [0, a). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.13.1 Man kann dieses Ergebnis so beschreiben: wenn rechte Seiten und Anfangswerte die gleiche Anordnung haben, dann bleibt diese Anordnung erhalten bei den betreffenden Lösungen.

Die Bedingung, dass mindestens eine der beiden rechten Seiten differenzierbar sein muss, kann man ohne weiteres weglassen.

Man kann dieses Korollar verwenden, um das Beispiel 2.11 ohne Zirkelschluss weiterzuführen.

2.5 Eindeutigkeit

Beispiel 2.14 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}.$$

Diese Differentialgleichung ist trennbar und man findet $y(t) = 0$ oder

$$\frac{y'(t)}{\sqrt[3]{y(t)}} = 1.$$

Diese letzte Möglichkeit liefert

$$\frac{3}{2} |y(t)|^{2/3} = t - c$$

und

$$y(t) = \pm \left(\frac{2}{3}(t - c)\right)^{3/2}.$$

Wir finden als Lösungen:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < c \\ \left(\frac{2}{3}(t - c)\right)^{3/2} & \text{für } t \geq c, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$y(t) = 0 \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < c \\ -\left(\frac{2}{3}(t - c)\right)^{3/2} & \text{für } t \geq c, \end{cases} \quad (2.8)$$

Man findet mehrere Lösungen für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

denn nicht nur $y(t) = 0$ sondern auch für jedes $c \geq 0$ ist y in (2.7) und (2.8) eine Lösung.

Ein Problem, das mehrere Lösungen bietet, ist „physikalisch“ nicht gewünscht und bedeutet meistens, dass das Modell nicht das richtige ist.

Eine direkte Folge von Theorem 2.12 für

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

ist:

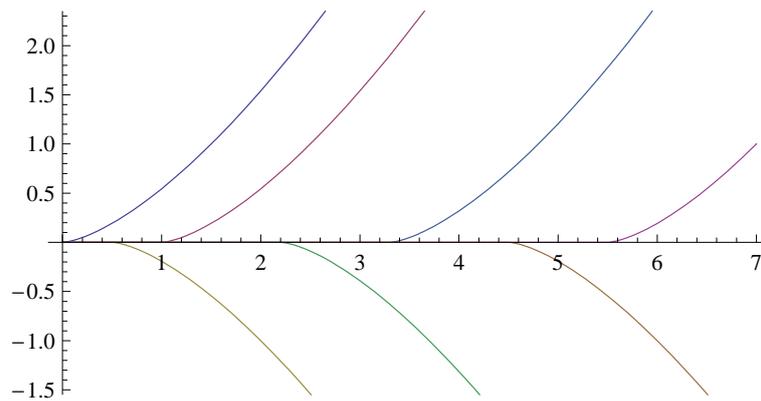


Abbildung 2.5: Skizzen zu einigen Lösungen des Anfangswertproblems (2.9).

Korollar 2.15 (Eindeutigkeit) Sei f stetig und derart, dass es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein L gibt mit

$$|f(t, \xi) - f(t, \eta)| \leq L |\xi - \eta| \quad \text{für } t \in [0, a] \quad \text{und } \xi, \eta \in [-M, M] \quad (2.11)$$

Dann hat das Anfangswertproblem (2.10) höchstens eine Lösung $y : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Wenn es zwei verschiedene Lösungen gibt, nennen wir sie y_1 und y_2 mit $y_1(0) = y_2(0)$, dann gilt auch $y_1(0) \geq y_2(0)$ und es folgt aus Theorem 2.12, dass $y_1(t) \geq y_2(t)$ für $t \in [0, a)$. Weil auch $y_2(0) \geq y_1(0)$ gilt, folgt ebenso, dass $y_2(t) \geq y_1(t)$ für $t \in [0, a)$. Also hat man $y_1(t) = y_2(t)$ für $t \in [0, a)$ und es gibt höchstens eine Lösung. ■

Kriterium 2.16 Hadamard nannte ein Problem **wohldefiniert**, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es hat mindestens eine Lösung (**Existenz**).
- Es hat höchstens eine Lösung (**Eindeutigkeit**).
- Wenn man das Problem ein wenig stört, wird sich die Lösung auch nur ein wenig ändern (**Stetige Abhängigkeit der Parameter**).

In diesem Licht ist das letzte Korollar ein sehr wichtiges Ergebnis: Wir haben ein Kriterium, das die Eindeutigkeit garantiert. Wenn wir die Existenz bewiesen haben, können wir sogar die stetige Abhängigkeit der Anfangswerte folgern.

Korollar 2.17 (Stetigkeit bezüglich der Anfangswerte) Sei $f : [0, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und derart, dass es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein L gibt mit

$$|f(t, \xi) - f(t, \eta)| \leq L |\xi - \eta| \quad \text{für } t \in [0, a] \quad \text{und } \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Seien $y_a, y_b : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von (2.10) mit Anfangswerten $y_{a,0}, y_{b,0} \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$|y_a(t) - y_b(t)| \leq e^{Lt} |y_{a,0} - y_{b,0}| \quad \text{für } t \in [0, a]. \quad (2.13)$$

Bemerkung 2.17.1 Die Bedingung in (2.12) heißt: $f : [0, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen.

Beweis. Aus (2.12) folgt für $\xi \geq \eta$, dass

$$f(t, \xi) - f(t, \eta) - L(\xi - \eta) \leq L|\xi - \eta| - L(\xi - \eta) = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt aus $y_a(0) > y_b(0)$, dass $y_a(t) > y_b(t)$ für $t \in [0, a]$. Nehmen wir an, dass $y_a(0) > y_b(0)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} e^{-Lt}(y_a(t) - y_b(t)) - (y_a(0) - y_b(0)) &= \int_0^t \frac{d}{ds} (e^{-Ls}(y_a(s) - y_b(s))) ds \\ &= \int_0^t e^{-Ls} ((y'_a(s) - y'_b(s)) - L(y_a(s) - y_b(s))) ds = \\ &= \int_0^t e^{-Ls} ((f(s, y_a(s)) - f(s, y_b(s))) - L(y_a(s) - y_b(s))) ds \leq 0, \end{aligned}$$

und es gilt

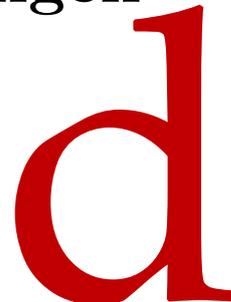
$$y_a(t) - y_b(t) \leq e^{Lt}(y_a(0) - y_b(0)) = e^{Lt}(y_{a,0} - y_{b,0}).$$

Für $y_a(0) < y_b(0)$ gilt ähnliches (man vertausche a und b) und wir finden (2.13). ■

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 3

Gleichungen höherer Ordnung und Systeme



3.1 Gleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung

Wir haben Bekanntschaft gemacht mit gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Der nächste Schritt wäre, ein etwas breiteres Spektrum zu betrachten. Man könnte sich statt mit erster Ordnung mit höherer Ordnung beschäftigen oder mit Systemen von Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung wäre

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (3.1)$$

Ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung kann man umformen in ein System erster Ordnung. Setze $y = x_1$, $y' = x_2$ bis $y^{(n-1)} = x_n$. Die Differentialgleichung in (3.1) ändert sich in

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ g(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Es ist also kein Verlust der Allgemeinheit, wenn wir uns auf Systeme erster Ordnung konzentrieren. Wir können solche Systeme schreiben als:

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)).$$

Ein Anfangswertproblem für ein solches System ist dann

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)), \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Wenn \vec{F} n Komponenten hat, hat auch \vec{x} n Komponenten und der Anfangswert \vec{x}_0 ist durch n Werte festgelegt. Wir werden noch zeigen, dass ein solches Anfangswertproblem, mit \vec{F} eine genügend nette Funktion, für jedes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung hat.

Definition 3.1 Wir nennen $\vec{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (3.4), wenn folgendes erfüllt ist:

1. Es gilt $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.
2. Die Funktion $t \mapsto \vec{x}(t)$ ist stetig auf (a, b) und $t \mapsto \vec{x}(t)$ ist differenzierbar auf (a, b) mit Ausnahme von isolierten Stellen $\{t_i\}$.
3. die Gleichung $\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t))$ ist erfüllt auf $(a, b) \setminus \{t_i\}$.

Für $t \mapsto \vec{x}(t)$ stetig auf (a, b) schreibt man $\vec{x} \in C(a, b)$. Man schreibt $\vec{x} \in C^1(a, b)$, wenn die Funktion $t \mapsto \vec{x}(t)$ differenzierbar ist auf (a, b) und die Ableitung stetig ist: $\vec{x}' \in C(a, b)$. Wenn $y = x_1$ wie in (3.3) ist, bedeutet das, dass $y \in C^{n-1}(a, b)$ gilt und dass $y^{(n-1)}$ differenzierbar ist mit Ausnahme von isolierten Stellen.

3.2 Lineare Gleichungen und Systeme

Ein Operator L auf einem realen Vektorraum V nennt man linear, wenn

$$L(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Lv_1 + c_2Lv_2 \text{ für alle } v_i \in V \text{ und } c_i \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Definition 3.2 Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung der Form

$$x^{(n)}(t) = a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) + f(t)$$

nennt man **linear**.

- Wenn alle a_i konstant sind, dann sagt man '**mit konstanten Koeffizienten**'.
- Wenn $f = 0$, dann nennt man diese lineare Gleichung **homogen** oder **reduziert**.

Definition 3.3 Ein System Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad (3.6)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^{n \times n}(\mathbb{R})$ (die $n \times n$ Matrizen) und $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, nennt man linear.

- Wenn A eine konstante Matrix ist, dann sagt man '**mit konstanten Koeffizienten**'.
- Wenn $f = 0$, dann nennt man dieses System **homogen** oder **reduziert**.

Schreibt man das lineare System in (3.6) wie folgt,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t) \right) \vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad (3.7)$$

dann sieht man den Zusammenhang mit linearen Operatoren.

Bemerkung 3.3.1 Wenn es aus dem Kontext klar ist, dass man mit mehreren Komponenten zu tun hat, kann man das Vektorzeichen weglassen.

Aus der linearen Struktur folgt sofort das folgende Ergebnis.

Lemma 3.4 Seien $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$ Lösungen von

$$x'(t) = A(t) x(t) + f(t) \text{ und } y'(t) = A(t) y(t) + g(t),$$

dann ist $t \mapsto z(t) := c_1 x(t) + c_2 y(t)$ eine Lösung von

$$z'(t) = A(t) z(t) + c_1 f(t) + c_2 g(t).$$

Beweis. Man hat sofort:

$$\begin{aligned} z'(t) &= c_1 x'(t) + c_2 y'(t) = c_1 (A(t) x(t) + f(t)) + c_2 (A(t) y(t) + g(t)) = \\ &= A(t) (c_1 x(t) + c_2 y(t)) + c_1 f(t) + c_2 g(t) = A(t) z(t) + c_1 f(t) + c_2 g(t). \end{aligned}$$

■

3.3 Eindeutigkeit für lineare Systeme

Lemma 3.5 (Eindeutigkeit) Wenn $A(t) \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ beschränkt ist, hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = A(t) x(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ höchstens eine stückweise stetig differenzierbare Lösung.

Bemerkung 3.5.1 Lösungen haben wir definiert als stetige Funktionen, welche mit Ausnahme von isolierten Stellen, differenzierbar sind und die Differentialgleichung erfüllen. Wenn f und A stückweise stetig¹ sind, dann folgt aus der Gleichung, dass auch x' stückweise stetig ist mit möglicher Ausnahme von isolierten Stellen. Genauer gesagt, wenn A , f und x in einer Umgebung von t_0 stetig sind, ist auch x' stetig in dieser Umgebung; wenn t_0 so eine isolierte Ausnahmestelle ist, existieren immer noch die einseitigen Ableitungen: Durch den Mittelwertsatz gibt es $\xi_h \in (t_0, t_0 + h)$ mit

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = x'(\xi_h) = A(\xi_h) x(\xi_h) + f(\xi_h).$$

Weil $\lim_{\xi \downarrow t_0} A(\xi)$ und $\lim_{\xi \downarrow t_0} f(\xi)$ existieren, folgt

$$\begin{aligned} x'_r(t_0) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} (A(\xi_h) x(\xi_h) + f(\xi_h)) = \\ &= \lim_{\xi \downarrow 0} (A(\xi) x(\xi) + f(\xi)) \end{aligned}$$

und $\lim_{\xi \downarrow 0} (A(\xi) x(\xi) + f(\xi))$ existiert. Ähnlich existiert auch die linke Ableitung. Es folgt, dass x stückweise stetig differenzierbar ist.

¹Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man stückweise stetig, wenn man $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle aufteilen kann:

$$[a, b] = [a = a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_k, a_{k+1} = b]$$

und auf jedem dieser Teilintervalle $[a_i, a_{i+1}]$ gibt es eine stetige Funktion g_i mit $g_i = f$ auf (a_i, a_{i+1}) .

Beweis. Seien $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$ zwei verschiedene Lösungen auf dem Existenzintervall $[a, b] \ni 0$. Dann ist $s(t) := \|x(t) - y(t)\|^2$ eine zahlenwertige Funktion auf $[a, b]$. Die Beschränktheit von $A(t) \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$, liefert ein $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass

$$\xi \cdot A(t)\xi \leq M \|\xi\|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Ausnahme von isolierten Stellen gilt dann:

$$\begin{aligned} s'(t) &= 2(x(t) - y(t)) \cdot (x'(t) - y'(t)) = \\ &= 2(x(t) - y(t)) \cdot A(t)(x(t) - y(t)) \leq \\ &\leq 2M \|x(t) - y(t)\|^2 = 2M s(t). \end{aligned}$$

Wir finden

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{-2Mt} s(t)) = e^{-2Mt} (s'(t) - 2Ms(t)) \leq 0$$

und für $b \geq t_2 > t_1 \geq a$ folgt

$$e^{-2Mt_2} s(t_2) - e^{-2Mt_1} s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-2Mt} s(t)) dt \leq 0, \quad (3.8)$$

wenn zwischen t_1 und t_2 keine isolierten Problemstellen liegen. An solchen Problemstellen kommt man mit der Stetigkeit von $t \mapsto s(t)$ vorbei² und es folgt, dass (3.8) sogar für alle $t = t_2 > 0$ und $t_1 = 0$ gilt:

$$e^{-2Mt} s(t) = e^{-2Mt} s(t) - e^{-2M \cdot 0} s(0) \leq 0.$$

Weil s eine nicht-negative Funktion ist, folgt $s(t) = 0$ für alle $t \in [0, b]$. Ein ähnliches Ergebnis kann man für $t < 0$ ableiten. Es gilt also, dass $\|x(t) - y(t)\| = 0$, ein Widerspruch. ■

3.4 Formelle Lösungen linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten

Gemeint sind Systeme der folgenden Art:

$$\vec{x}'(t) = A \vec{x}(t) + \vec{f}(t). \quad (3.9)$$

Hier ist A eine Matrix mit konstanten Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Funktion \vec{f} ist vektorwertig:

$$\vec{f}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Auch hier kann man sogar $\vec{f}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ erlauben.

²Sei x stetig und stückweise stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Nehme an, nur in $c \in (a, b)$ existiert die Ableitung nicht. Dann gilt

$$\begin{aligned} x(b) - x(a) &= x(c) - x(a) + x(b) - x(c) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} x(c - \varepsilon) - x(a) + x(b) - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} x(c + \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} x'(s) ds + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b x'(s) ds = \int_a^c x'(s) ds + \int_c^b x'(s) ds. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile stehen eigentlich zwei uneigentliche Riemann-Integrale.

3.4.1 Das reduzierte oder homogene Problem

Für (3.9) hat das reduzierte Problem die folgende Gestalt:

$$\vec{x}'(t) = A \vec{x}(t), \quad (3.10)$$

Die Gleichung (3.10) sieht sehr ähnlich aus wie

$$x'(t) = a x(t)$$

und lässt sich sogar ähnlich mit der Exponentialfunktion lösen.

Wir erinnern noch mal daran, dass die Exponentialfunktion als eine Potenzreihe definiert ist:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (3.11)$$

und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ hat. Außerdem gilt innerhalb des Konvergenzradius, dass Potenzreihen differenzierbar sind, und dann sogar gilt, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k z^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}.$$

Statt in (3.11) $z \in \mathbb{C}$, könnte man auch $z \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ nehmen. Sogar komplexwertige Koeffizienten kann man zulassen.

Definition 3.6 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$. Man definiert

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Bemerkung 3.6.1 Statt $\exp(A)$ schreibt man auch e^A .

Lemma 3.7 Für alle $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ konvergiert $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k$ in $M^{n \times n}(\mathbb{C})$. Oder anders gesagt: $\exp(A)$ ist wohldefiniert.

Bemerkung 3.7.1 Kennt man die Matrixnorm, dann zeigt man das Ergebnis direkt aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Komponente $\left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j}$ konvergiert für $\ell \rightarrow \infty$. Setzen wir

$$m = \max \{ |A_{ij}| ; 1 \leq i, j \leq n \}.$$

Dann gilt für den i, j -Eintrag von $\frac{1}{k!} A^k$, dass

$$\left| \left(\frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j} \right| \leq \left(\frac{1}{k!} \begin{pmatrix} m & m & \cdots & m \\ m & m & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & \cdots & m \end{pmatrix}^k \right)_{i,j} = \frac{m^k n^{k-1}}{k!}.$$

Weil die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k n^{k-1}}{k!}$$

konvergiert, nämlich nach $\frac{1}{n}e^{mn}$, ergibt das Majorantenkriterium, dass auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j}$$

(absolut) konvergiert. ■

Lemma 3.8 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.12)$$

genau eine Lösung, nämlich die Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$x(t) = \exp(At) x_0.$$

Beweis. Durch Lemma 3.7 wissen wir, dass jede Komponente von $\exp(At)$ Konvergenzradius ∞ hat. Auch wissen wir, dass man innerhalb des Konvergenzradius die Folge von Summe und Ableitung ändern darf, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Das heißt:

$$\begin{aligned} (\exp(At) x_0)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k x_0 \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} (At)^k x_0 \right)' = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} A^k t^{k-1} x_0 = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell t^\ell x_0 = A \exp(At) x_0. \end{aligned}$$

Weil folgendes gilt³

$$(\exp(At) x_0)_{t=0} = e^O x_0 = I x_0 = x_0,$$

finden wir, dass $x(t) := e^{At} x_0$ eine Lösung ist von (3.12).

Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 3.5. ■

3.4.2 Einige Eigenschaften des Exponenten einer Matrix

Wir haben für $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ und $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $\exp(tA)$ definiert:

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \frac{1}{6}t^3 A^3 + \dots$$

Einige Eigenschaften sind die folgenden:

Lemma 3.9 Seien $A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$. Es gilt

- $\exp(0A) = I$.
- $\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
- $\frac{\partial}{\partial t} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- $AB = BA \Leftrightarrow \exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A+B))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

³Hier ist $I \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ die Identitätsmatrix und $O \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ die Nullmatrix:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4.3 Das allgemeine Problem

Wir kommen zurück auf (3.9), bei dem man auch eine rechte Seite $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zulässt. Dieses System kann man (fast) genau so lösen wie eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Theorem 3.10 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

genau eine Lösung $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, nämlich

$$x(t) = e^{A(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.14)$$

Bemerkung 3.10.1 Das Integral über eine Vektorfunktion ist definiert als Vektor von den Integralen der einzelnen Komponenten. Also für $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit integrierbaren Komponenten g_i , $i = 1, \dots, n$

$$\int_a^b g(s)ds = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(s)ds \\ \int_a^b g_2(s)ds \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(s)ds \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite von (3.14) steht solch ein Integral.

Bemerkung 3.10.2 Das Definitionsgebiet $[a, b]$ von f wird als Definitionsgebiet für x übernommen. Wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann findet man für die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ die Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = e^{A(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.15)$$

Dabei ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig zu wählen. Die Tatsache, dass das Definitionsgebiet übernommen wird, kann man so allgemein nur bei linearen Gleichungen annehmen.

Beweis. Der Anfangswert passt, denn

$$x(a) = e^{A0}x_0 + \int_a^a e^{A(t-s)}f(s)ds = Ix_0 = x_0.$$

Weiter schreibe man

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds = \\ &= e^{At}x_0 + \int_a^t e^{At}e^{-As}f(s)ds = e^{At} \left(x_0 + \int_a^t e^{-As}f(s)ds \right) \end{aligned}$$

und differenziere:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{At} \left(x_0 + \int_a^t e^{-As} f(s) ds \right) \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{At} \right) \left(x_0 + \int_a^t e^{-As} f(s) ds \right) + e^{At} \frac{\partial}{\partial t} \left(x_0 + \int_a^t e^{-As} f(s) ds \right) = \\ &= A e^{At} \left(x_0 + \int_a^t e^{-As} f(s) ds \right) + e^{At} e^{-At} f(t) = \\ &= Ax(t) + f(t). \end{aligned}$$

Man achte darauf, dass man bei den Multiplikationen die Folge nicht ohne weiteres umordnet. Weil es Matrizen sind, gilt meistens $AB \neq BA$. ■

3.5 Berechnung des Exponenten einer Matrix

Beispiel 3.11 Wenn man Maple fragt, bekommt man ziemlich schnell, dass

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{11+\sqrt{33}}{22} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11-\sqrt{33}}{22} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} & \frac{2\sqrt{33}}{33} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{2\sqrt{33}}{33} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} \\ \frac{\sqrt{33}}{11} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{\sqrt{33}}{11} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} & \frac{11-\sqrt{33}}{22} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11+\sqrt{33}}{22} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Direkt von Hand so ein Ergebnis zu berechnen ist keine besonders erfreuliche Sache. Man soll als (zukünftiger) Mathematiker aber wissen, wie man es berechnen kann, beziehungsweise wieso der Rechner das so einfach schafft.

Wir geben einige Ergebnisse, die man verwenden kann.

Lemma 3.12 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ und $t \in \mathbb{R}$.

1. Für eine Ähnlichkeitstransformation $B, T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ mit T invertierbar gilt:

$$A = TBT^{-1} \Rightarrow \exp(tA) = T \exp(tB) T^{-1}$$

2. Für eine Blockmatrix A , mit $B \in M^{k \times k}(\mathbb{C})$ und $C \in M^{(n-k) \times (n-k)}(\mathbb{C})$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}$$

3. Für eine Diagonalmatrix gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

4. Für einen Jordanblock gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} \\ \vdots & & \ddots & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Beweis.

1. Man findet sofort

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp(tTBT^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tTBT^{-1})^k = \\ &= T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tB)^k \right) T^{-1} = T \exp(tB) T^{-1}.\end{aligned}$$

2. Auch hier

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t^k B^k & O \\ O & t^k C^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Das Ergebnis folgt als wiederholte Anwendung von 2.

4. Wir schreiben

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und finden so $A = \lambda I + E$. Weil $\lambda I E = \lambda E = E \lambda I$, das heißt, λI und E kommutieren, folgt mit Lemma 3.9, dass

$$\exp(tA) = \exp(t\lambda I + tE) = \exp(t\lambda I) \exp(tE) = e^{t\lambda} \exp(tE). \quad (3.17)$$

Weil E nilpotent ist (die Linie mit 1 schiebt sich jedesmal nach rechts in E^2 , E^3 usw.) und $E^n = O$, gilt

$$\begin{aligned}\exp(tE) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tE)^k = I + tE + \frac{t^2}{2} E^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} E^{n-1} + O = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!} t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} t^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und kombiniert man mit (3.17), folgt so das gewünschte Ergebnis. ■

Ohne Beweis werden wir ein Ergebnis aus der Linearen Algebra verwenden, nämlich dass jede Matrix einer Jordan-Matrix ähnlich ist. Eine Jordan-Matrix ist wie folgt definiert:

Definition 3.13 Eine Matrix $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ ist eine **Jordan-Matrix**, wenn sie wie folgt aus Blöcken zusammengesetzt ist:

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & O & O & \cdots & \cdots & O \\ O & B_2 & O & & & \vdots \\ O & O & B_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & B_{k-1} & O \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & O & B_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Jede Matrix ist ähnlich einer Jordan-Matrix heißt:

Theorem 3.14 (Camille Jordan) Für jede $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ gibt es eine invertierbare Matrix $T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ und eine Jordan-Matrix $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ derart, dass

$$A = T J T^{-1}.$$

Einen Beweis sollte man in der Vorlesung Lineare Algebra bekommen. Die Skalare λ_i , die in J erscheinen, sind die Eigenwerte von A .

- Die algebraische Vielfachheit von λ_i , das heißt die Vielfachheit von λ_i als Nullstelle vom Polynom $\det(A - \lambda I)$, liest man ab in J als die Anzahl der λ_i auf der Diagonalen von J .
- Die geometrische Vielfachheit von λ_i ist die Dimension vom Eigenraum

$$\dim \{ \phi \in \mathbb{C}^n; A\phi = \lambda_i \phi \},$$

diese findet man wieder als die Anzahl der Jordan-Blöcke B_j mit λ_i auf der Diagonalen.

- Wenn die geometrische Vielfachheit von λ_i echt kleiner ist als die algebraische, dann gibt es mindestens einen generalisierten Eigenvektor der ersten Ordnung:

- $\phi \in \mathbb{C}^n$ ist ein generalisierter Eigenvektor der k -ten Ordnung für A beim Eigenwert λ_i , wenn

$$(A - \lambda_i I)^{k+1} \phi = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda_i I)^k \phi \neq 0.$$

- wenn $\phi \in \mathbb{C}^n$ ein generalisierter Eigenvektor der k -ten Ordnung beim Eigenwert λ_i ist, dann ist $(A - \lambda_i I) \phi$ ein generalisierter Eigenvektor der $(k-1)$ -ten Ordnung beim Eigenwert λ_i . Eigenvektoren soll man auffassen als generalisierter Eigenvektor der 0-ten Ordnung.
- Jede Matrix hat eine Basis aus Eigenvektoren und generalisierten Eigenvektoren.

Wenn man eine Zerlegung der Form $A = T J T^{-1}$ gefunden hat, dann kann man mit Hilfe von Lemma 3.12 $\exp(tA) = T \exp(tJ) T^{-1}$ berechnen.

Beispiel 3.15 Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ findet man durch $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$, das heißt

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 - i$ und $\lambda_2 = 1 + i$. Zwei dazugehörige Eigenvektoren sind:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

und

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1-i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.16 Für $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ kann man auch verwenden, dass $A = \alpha I + \beta E$ mit

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weil $IE = EI$ gilt, folgt $\exp((\alpha I + \beta E)t) = \exp(\alpha It) \exp(\beta Et)$ und mit $E^2 = -I$, $E^3 = -E$ und $E^4 = I$ folgt

$$\exp(sE) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots & s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \dots \\ -s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ -e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.17 Für die Matrix, die wir in Beispiel 3.11 angeschaut haben, hat man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} & \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{33}-11}{22} & -\frac{2\sqrt{33}}{33} \\ \frac{11-\sqrt{33}}{22} & \frac{2\sqrt{33}}{33} \end{pmatrix}$$

und es folgt das Ergebnis von vorhin durch

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} & \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{5-\sqrt{33}}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{5+\sqrt{33}}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{33}-11}{22} & -\frac{2\sqrt{33}}{33} \\ \frac{11-\sqrt{33}}{22} & \frac{2\sqrt{33}}{33} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.18 Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

hat als Lösung $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t + 2e^t \sin t \\ -e^t \sin t + 2e^t \cos t \end{pmatrix}.$

Beispiel 3.19 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte λ der Matrix findet man aus

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0,$$

nämlich $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$. Dazugehörige Eigenvektoren sind $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man kann den formellen Weg gehen:

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Man kann sich auch überlegen, dass $x(0) = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2$ und deshalb

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{\lambda_1 t}\varphi_1 + \frac{2}{3}e^{\lambda_2 t}\varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

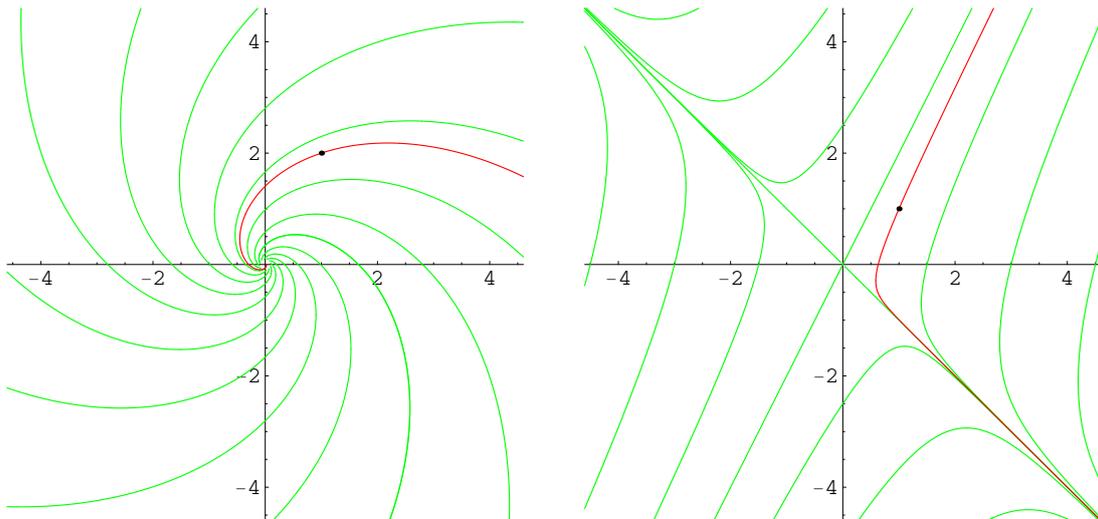


Abbildung 3.1: Links in rot die Spur der Lösung vom Beispiel 3.18. Rechts die Spur der Lösung vom Beispiel 3.19. Einige andere Lösungen zu diesen beiden Differentialgleichungen, also mit anderen Anfangswerten, sind in grün dargestellt. Überlegen Sie, in welcher Richtung diese Spuren durchlaufen werden.

Beispiel 3.20 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 - 2i$ und $\lambda_3 = -1 + 2i$ und dazugehörige Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man kann den Exponenten berechnen oder direkt den Anfangswert auf eine Basis von Eigenvektoren zerlegen und bekommt schlussendlich die Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}e^t + \frac{1}{10}e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{10}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{20}e^t + \frac{1}{20}e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{20}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

Eine Abbildung der Spur findet man in Abbildung 3.2.

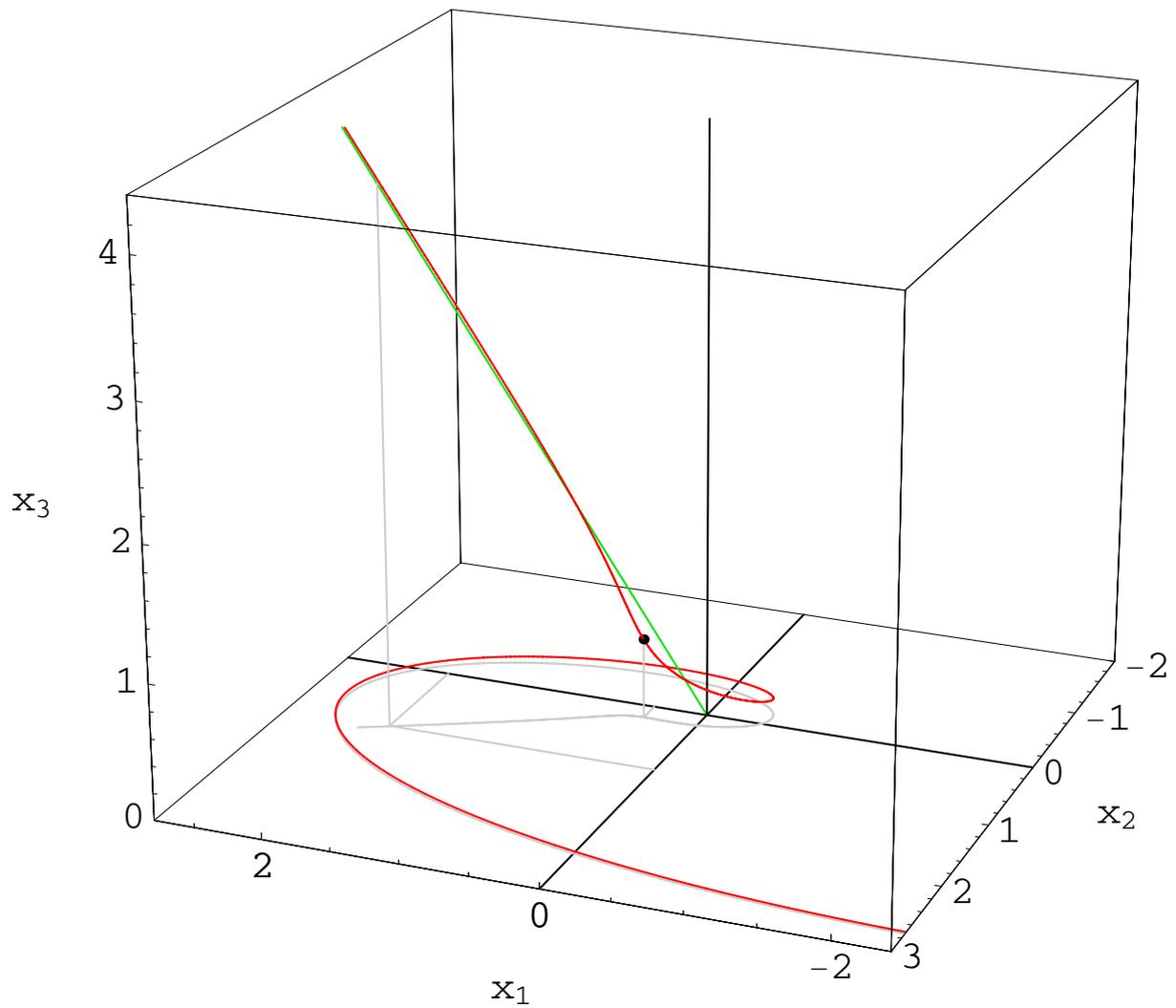


Abbildung 3.2: Die Spur der Lösung vom Beispiel 3.20. Überlegen Sie, in welcher Richtung diese Spur durchlaufen wird. Und was bedeutet die grüne Linie, welche aus $(0,0,0)$ nach oben führt?

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 4



Mehr Lineares, Stabilität

4.1 Lineare Gleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man als lineares System angehen. Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und betrachte

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t). \quad (4.1)$$

Dann setzt man $y_i(t) = x^{(i-1)}(t)$ für $i = 1, \dots, n$ und findet

$$y'(t) = Ay(t) + g(t) \quad (4.2)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Für jeden Eigenwert λ von A gilt $\det(A - \lambda I) = 0$ und das wird jetzt bei der Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile zu

$$(a_1 - \lambda) \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

anders gesagt:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (4.4)$$

Definition 4.1 Man nennt (4.4) die charakteristische Gleichung für (4.1).

Lemma 4.2 Sei $a_i \in \mathbb{C}$ und sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ wie in (4.3). Jeder Eigenwert von A hat geometrische Vielfachheit gleich 1.

Beweis. Wenn λ ein Eigenwert ist, dann gilt für dazugehörige Eigenvektoren φ

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass

$$\varphi_n = \lambda \varphi_{n-1} = \lambda^2 \varphi_{n-2} = \cdots = \lambda^{n-1} \varphi_1,$$

also höchstens ein unabhängiger Eigenvektor. ■

Theorem 4.3 Sei $a_i \in \mathbb{C}$ und sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ wie in (4.3). Nehme an, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ sind die Eigenwerte von A mit algebraischen Vielfachheiten $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$.

- Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) \quad (4.5)$$

wie folgt:

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.6)$$

- Kennt man eine Lösung \tilde{x} von (4.1), dann ist die allgemeine Lösung von (4.1) wie folgt:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.7)$$

Bemerkung 4.3.1 „ x in (4.7) ist die allgemeine Lösung von (4.1)“ heißt: jede Lösung x von (4.1) kann man schreiben wie in (4.7) und umgekehrt, jede Funktion, die man so wie in (4.7) schreiben kann, ist eine Lösung von (4.1).

Bemerkung 4.3.2 $F = \{t^m e^{\lambda_i t}; 1 \leq i \leq k \text{ und } 0 \leq m \leq m_i - 1\}$ ist ein Fundamentalsystem für (4.5). F heißt ein Fundamentalsystem, wenn es eine Basis für den Lösungsraum ist.

Bemerkung 4.3.3 Die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleicht n . Die Anzahl der Konstanten in (4.6) gleicht auch der Summe der algebraischen Vielfachheiten. Weil die Funktionen $t^m e^{\lambda_i t}$ (linear) unabhängig¹ sind, bilden die Funktionen in (4.6) einen n -dimensionalen Lösungsraum.

¹Die Funktionen $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $i = 1, \dots, n$ sind linear unabhängig, wenn

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \text{ für alle } x \in I$$

impliziert, dass $c_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Geht man zurück zum System (4.2) mit A und g wie in (4.3), dann findet man für jeden Anfangswert y_0 genau eine Lösung. Die Übersetzung für (4.1) lautet: für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ hat man genau eine Lösung x vom folgenden Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t) \\ x(0) = y_0, \quad x'(0) = y_1, \quad x''(0) = y_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = y_n. \end{cases}$$

Beweis. Die Lösungen y vom System (4.2) mit A und g wie in (4.3) folgen aus Satz 3.10. Nach Lemma 3.12 enthalten die expliziten Lösungen der homogenen Gleichung nur Terme $c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}$ mit $m \leq m_i - 1$. Das heißt, jede Lösung der homogenen Gleichung kann man schreiben wie auf der rechten Seite von (4.6). Weil man eindeutig hin- und herwechseln kann zwischen der Gleichung n -ter Ordnung für y und dem System erster Ordnung für x , muss auch die Lösung für x in (4.5) n -dimensional sein. Weil die rechte Seite von (4.6) genau n frei wählbare Konstanten hat, ist jede Funktion auf dieser rechten Seite eine Lösung.

Die Behauptung für die inhomogene Gleichung folgt mit der Bemerkung, dass wenn \tilde{x} und \hat{x} die Gleichung (4.1) erfüllen, die Funktion $x = \tilde{x} - \hat{x}$ eine Lösung von (4.5) ist. ■

Beispiel 4.4 Wir betrachten

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^{2t} + t^3. \quad (4.8)$$

Die dazugehörige homogene Gleichung ist $x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = 0$ und die Eigenwerte findet man durch

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Also $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ sind die Eigenwerte und beide haben algebraische Vielfachheit 2 (und geometrische Vielfachheit 1). Das liefert

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Eine spezielle Lösung für (4.8) findet man durch $x = y_1$ mit

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} (t-s) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + e^{2s} \end{pmatrix} ds.$$

Die explizite Berechnung ist ohne C.A.S.² sehr intensiv. Man kann auch versuchen zu raten! Wenn man $\tilde{x}_a(t) = e^{2t}$ versucht, findet man $\tilde{x}_a''''(t) - 2\tilde{x}_a''(t) + \tilde{x}_a(t) = (16 - 8 + 1)e^{2t}$ und das passt nicht. Die Funktion $x_a(t) = \frac{1}{9}e^{2t}$ geht schon besser:

$$x_a''''(t) - 2x_a''(t) + x_a(t) = e^{2t}$$

Mit ein paar Polynomversuchen findet man für $x_b(t) = t^3 + 12t$, dass $x_b''''(t) - 2x_b''(t) + x_b(t) = t^3$. Die schöne Linearitätseigenschaft liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{hom}}(t) + x_a(t) + x_b(t) = \\ &= x_a(t) + x_b(t) + c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

als allgemeine Lösung für (4.8).

²C.A.S. = Computer Algebra System. Gemeint ist Software wie Maple oder Mathematica, wo alle rechnerische Tricks programmiert sind, um zum Beispiel eine Stammfunktion zu finden.

Beispiel 4.5 Wir betrachten

$$x'''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^t. \quad (4.9)$$

Alles verläuft fast so wie vorher. Nur lediglich für eine spezielle Lösung der Form ce^t besteht keine Hoffnung, weil e^t schon eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Sogar te^t liefert 0 an der rechten Seite. Man hat dann aber Erfolg beim Versuch mit ct^2e^t :

$$x'''(t) - 2x''(t) + x(t) = c(t^2 + 8t + 12)e^t - 2c(t^2 + 4t + 2)e^t + ct^2e^t = 9ce^t.$$

Man nehme $c = \frac{1}{9}$. Die allgemeine Lösung ist $x(t) = \frac{1}{9}t^2e^t + c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$.

Algorithmus 4.6 [Raten statt Rechnen bei linearen Dgl.] Für eine spezielle Lösung von

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t)$$

bei besonderen f .

Wenn f keine Lösung der homogenen Gleichung ist:

Sei $f = \dots$, dann versuche man für $x = \dots$	
t^m	$\sum_{k=0}^m c_k t^k$
$e^{\gamma t}$	$ce^{\gamma t}$
$\sin(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$\cos(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$t^m e^{\gamma t}$	$\sum_{k=0}^m c_k t^k e^{\gamma t}$
\vdots	\vdots

Wenn die Funktion f schon eine Lösung der homogenen Gleichung ist, dann ist dieser Ansatz nicht erfolgreich. In so einem Fall versuche man als Lösung

$$x(t) = t^{m_1} \tilde{x}(t)$$

und wählt \tilde{x} aus der rechten Seite der Tabelle und $m_1 \in \mathbb{N}^+$.

4.2 Lineare Stabilität

Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$. Wir betrachten wiederum das homogene System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$x'(t) = Ax(t). \quad (4.10)$$

Definition 4.7 Das homogene lineare System in (4.10) heißt

- **stabil**, wenn für jede Lösung x gilt, es gibt $m \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\|x(t)\| \leq m \text{ für alle } t \geq 0;$$

- **instabil**, wenn es eine Lösung x gibt derart, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$.

Stabil trennt man in:

- **asymptotisch stabil**, wenn für alle Lösungen x gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$;
- **neutral stabil**, wenn das System stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

Bemerkung 4.7.1 Diese Klassifizierung gilt so nur für lineare Systeme. Bei homogenen linearen Systemen ist 0 immer ein Gleichgewichtspunkt (= konstante Lösung). Bei Gleichgewichtspunkten für nichtlineare Differentialgleichungen werden diese globalen Bedingungen ersetzt durch lokale Bedingungen für eine Umgebung des Gleichgewichtspunktes.

In dem letzten Paragraphen haben wir gesehen, dass das globale Verhalten bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten eigentlich nur von den Eigenwerten abhängt. Wir bekommen dann auch das folgende Ergebnis:

Lemma 4.8 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und sei $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ die Menge der unterschiedlichen Eigenwerte für A .

1. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, dann ist (4.10) asymptotisch stabil.
2. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ gilt für mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$, dann ist (4.10) instabil.
3. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und die algebraische Vielfachheit für alle λ_j mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ gleich die geometrische Vielfachheit, dann ist (4.10) stabil.
4. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ gilt für mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$ und die zugehörige algebraische Vielfachheit ist strikt größer als die geometrische, dann ist (4.10) instabil.

Beweis. Sei λ_i ein Eigenwert und seien $\#_{\text{alg},i}$ die algebraische und $\#_{\text{geo},i}$ die geometrische Vielfachheit. Dann gilt folgendes:

- Wenn $\vec{\varphi}_i$ ein zugehöriger Eigenvektor ist, dann ist $e^{\lambda_i t} \vec{\varphi}_i$ eine Lösung.
- Falls $\#_{\text{alg},i} > \#_{\text{geo},i}$ gilt, gibt es einen Eigenvektor $\vec{\varphi}_i$ und einen generalisierten Eigenvektor $\vec{\psi}_i$ mit $(A - \lambda_i) \vec{\psi}_i = \vec{\varphi}_i$. Die Funktion $e^{\lambda_i t} (\vec{\psi}_i + t \vec{\varphi}_i)$ ist eine Lösung.
- Alle Lösungen enthalten nur Terme der Form $t^m e^{\lambda_i t}$ mit $m \leq \#_{\text{alg},i} - \#_{\text{geo},i}$.

Die Ergebnisse folgen dann aus den folgenden Überlegungen:

1. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m-1} e^{\lambda_i t} = 0$.
2. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_i t}| = \infty$.
3. Wenn $\#_{\text{alg},i} = \#_{\text{geo},i}$, dann kommt $t^k e^{\lambda_i t}$ mit $k > 0$ nicht vor und

$$\|e^{\lambda_i t} \vec{\varphi}_i\| = \|\vec{\varphi}_i\| \text{ für } \operatorname{Re} \lambda_i = 0.$$

4. Wenn $\#_{\text{alg},i} > \#_{\text{geo},i}$ und $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, dann folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| e^{\lambda_i t} (\vec{\psi}_i + t \vec{\varphi}_i) \right\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \vec{\psi}_i + t \vec{\varphi}_i \right\| = \infty. \quad \blacksquare$$

Bemerkung 4.8.1 Wenn also gefragt wird, ob alle Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nach 0 konvergieren, braucht man nur die Eigenwerte und gegebenenfalls die Vielfachheiten zu berechnen.

Beispiel 4.9 *Das System*

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

ist asymptotisch stabil, denn es gilt $\lambda_1 = -1 - 3i$ und $\lambda_2 = -1 + 3i$. Für beide Eigenwerte gilt $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Die Lösungen sind

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \left(\cos(3t) - \frac{1}{3} \sin(3t) \right) & \frac{10}{3} e^{-t} \sin(3t) \\ -\frac{1}{3} e^{-t} \sin(3t) & e^{-t} \left(\cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t) \right) \end{pmatrix} x(0)$$

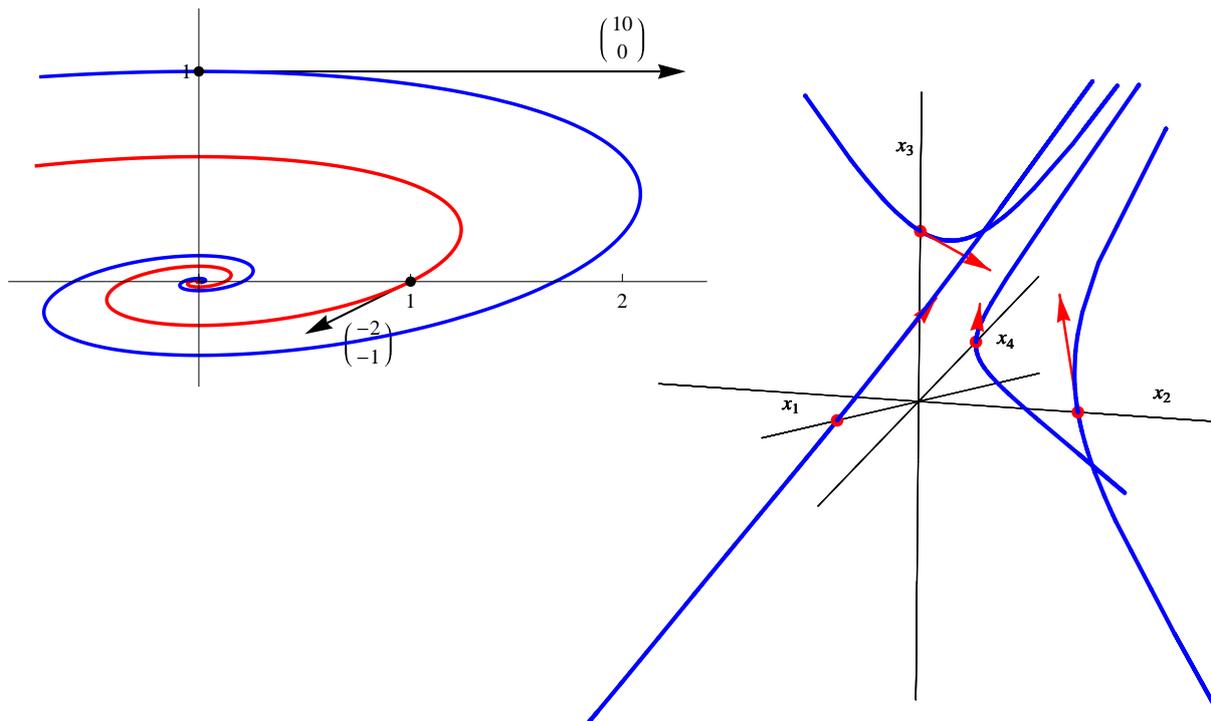


Abbildung 4.1: Links: Skizze zweier Lösungen aus Beispiel 4.9. Rechts: Zweidimensionale Projektion einiger Lösungen aus Beispiel 4.10. Die Vektoren sind die skalierten Spalten aus der Matrix.

Beispiel 4.10 *Das System*

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} x(t)$$

ist instabil, denn es gibt einen Eigenwert³ $\lambda \approx 4.45087$ und $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

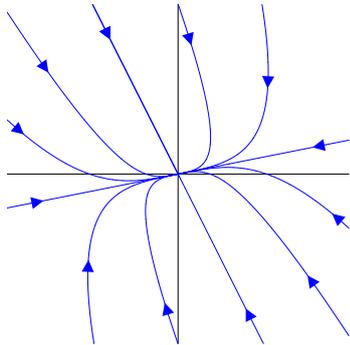
³Dieser Eigenwert ist numerisch approximiert. Statt numerisch vorzugehen, kann man auch das Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ näher untersuchen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von p und für diese Matrix A gilt

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \dots = \lambda^4 + 10\lambda^3 - 200\lambda - 384.$$

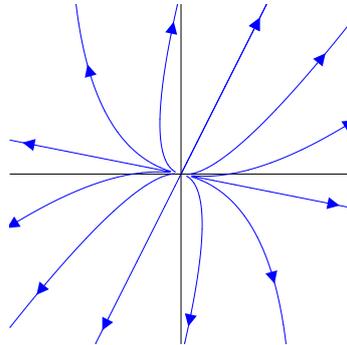
Weil $p(100) > 0$ und $p(0) = -384 < 0$, sagt der Zwischenwertsatz, dass $p(\lambda)$ eine positive Nullstelle besitzt.

4.3 Klassifizierung in zwei Dimensionen

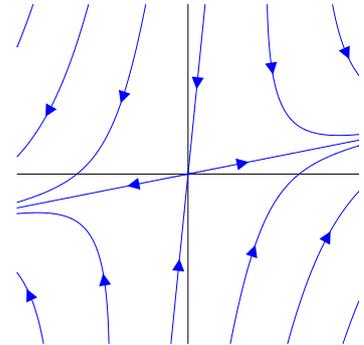
In zwei Dimensionen sind die Möglichkeiten ziemlich übersichtlich. So übersichtlich, dass man sogar individuelle Namen für die auftretenden Fälle⁴ hat.



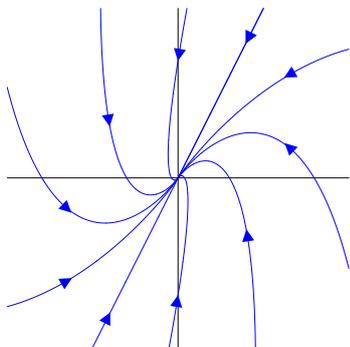
stabiler Knoten
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$
 Basis von Eigenvektoren



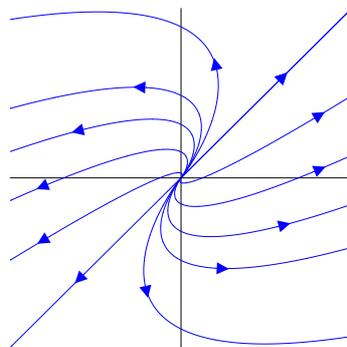
instabiler Knoten
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$
 Basis von Eigenvektoren



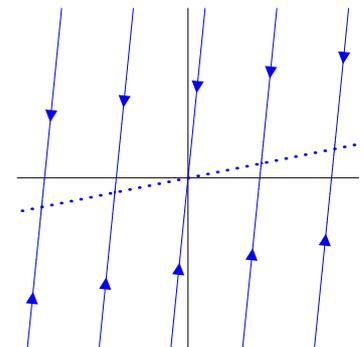
Sattelpunkt
 $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$



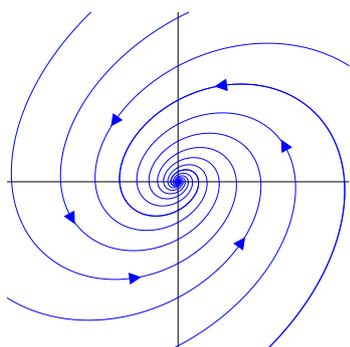
entarteter stabiler Knoten
 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$
 eindimensionaler Eigenraum



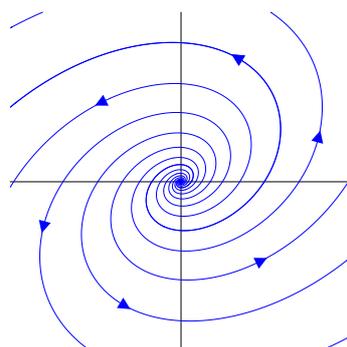
entarteter instabiler Knoten
 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$
 eindimensionaler Eigenraum



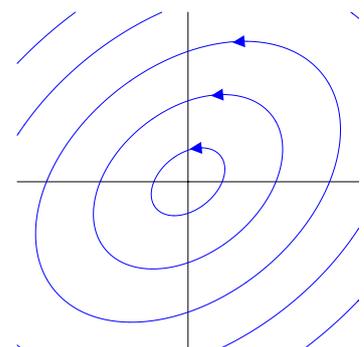
neutral stabiler Knoten
 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$



stabiler Strudel
 $\text{Re } \lambda_i < 0, \text{Im } \lambda_i \neq 0$



instabiler Strudel
 $\text{Re } \lambda_i > 0, \text{Im } \lambda_i \neq 0$



Zentrum
 $\text{Re } \lambda_i = 0, \text{Im } \lambda_i \neq 0$

⁴Für diese Bilder sind folgende Matrizen verwendet worden:

$\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 49 & 98 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 49 & 49 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -75 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & -25 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -29 \\ 5 & 25 \end{pmatrix},$

4.3.1 Geometrische Zusammenhänge

Das Gleichungssystem

$$x'(t) = A x(t) \quad (4.11)$$

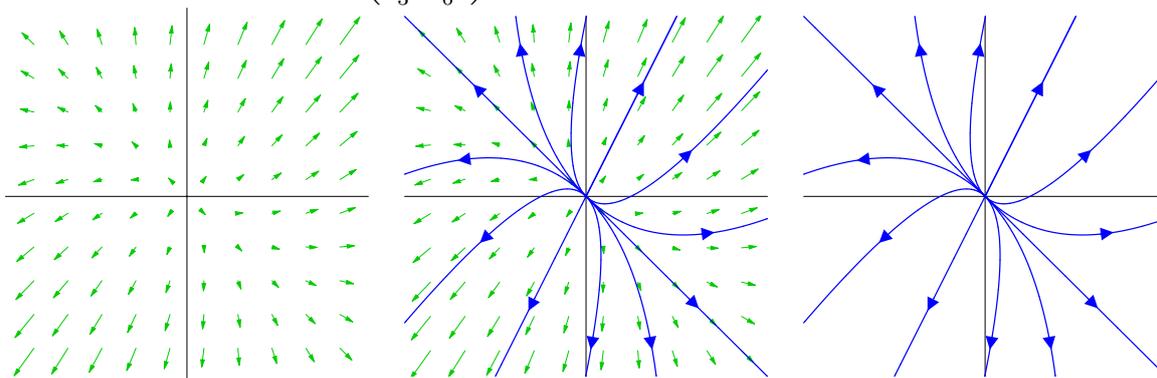
mit $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ gibt eine Beziehung zwischen Position und Richtung einer Lösungskurve. Für $n = 2$ gilt:

Eine Lösung von (4.11) hat an der Stelle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ die Richtung $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Das erlaubt es uns Lösungen zu skizzieren, ohne das System explizit zu lösen, indem wir den Vektoren im Vektorfeld $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 'folgen'.

Formal gesprochen ist ein zweidimensionales Vektorfeld eine Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 . Es lässt sich darstellen, indem man mehrere Punkte in der Ebene nimmt und in jedem Punkt einen Pfeil einzeichnet mit der durch das Vektorfeld angegebenen Größe und Richtung. Man denke an die Wettervorhersage für den Wind.

Beispiel 4.11 Für $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x(t)$ hat man:



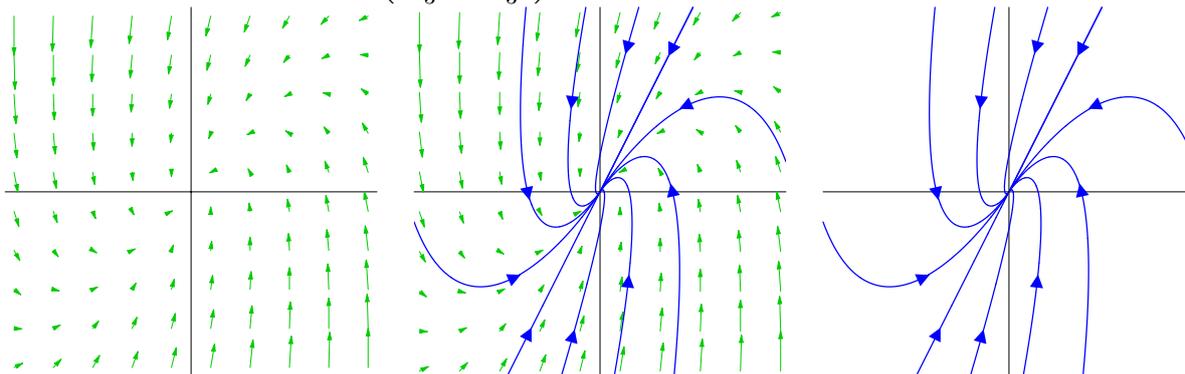
Die Eigenwerte sind 1 und $\frac{1}{2}$ und mit den zugehörigen Eigenvektoren findet man die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}.$$

Nach Anfangswert $x(0)$ gelöst wird die Lösung:

$$x(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \\ \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} x(0).$$

Beispiel 4.12 Für $x'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x(t)$ hat man:



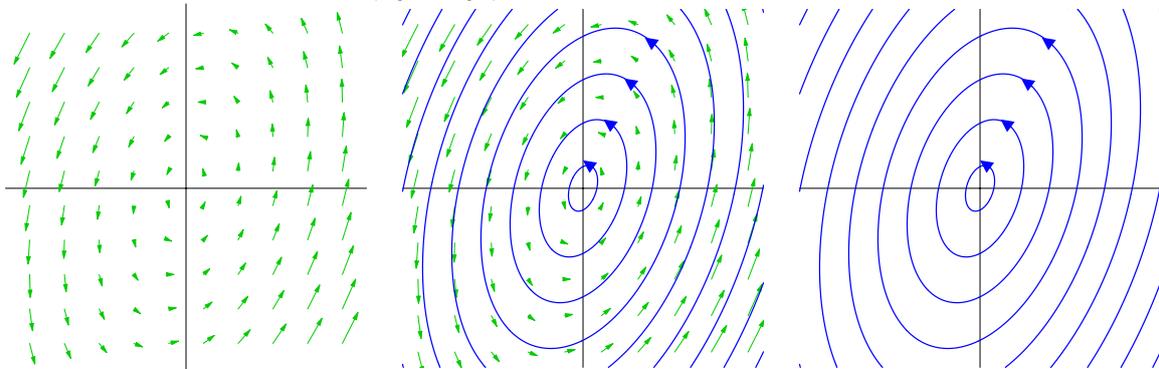
Es gibt hier nur einen Eigenwert: $\lambda = -1$. Verwendet man den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und einen generalisierten Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, wird die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Anfangswert $x(0)$ gelöst wird die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3}te^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}t\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4t}e^{-t}\right) \\ \frac{4}{3}te^{-t} & -\frac{4}{3}t\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4t}e^{-t}\right) \end{pmatrix} x(0). \end{aligned}$$

Beispiel 4.13 Für $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x(t)$ hat man:



Die Lösungen des Systems sind:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \frac{1}{3} \sin t & -\frac{2}{3} \sin t \\ \frac{5}{3} \sin t & \cos t - \frac{1}{3} \sin t \end{pmatrix} x(0).$$

Auch hier kann man die Lösungen mit Eigenvektoren schreiben, aber die sind dann in komplexer Form:

$$x(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } c_i \in \mathbb{C}.$$

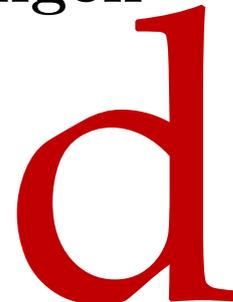
So eine Lösung ist reell genau dann, wenn $c_1 = \bar{c}_2$. Setzt man $c_1 = a + ib$ und $c_2 = a - ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, findet man die reellen Lösungen und es erscheinen Terme mit $\cos t$ und $\sin t$. Man erinnere sich, dass $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Bemerkung 4.13.1 In diesen Bildern erkennt man auch die lineare Eigenschaft dieser Systeme. Wenn $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung ist, dann ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{x}(t) = cx(t)$ eine Lösung. Für das zugehörige Vektorfeld bedeutet das, dass die Vektoren, die auf einer geraden Linie durch den Ursprung liegen, parallel sind. Genauer gesagt: auf der gleichen Seite zeigen sie in die gleiche Richtung; gegenüberliegend in die entgegengesetzte Richtung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 5

Approximationen und Funktionsfolgen



5.1 Approximationen

Wir werden in diesem Kapitel einige Möglichkeiten vorstellen, wie man eine Lösung einer Differentialgleichung approximieren kann. Um es nicht unnötig kompliziert zu machen, werden wir eine Gleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

betrachten und nicht gleich ein System von Gleichungen erster Ordnung. Wenn man genau hinschaut, sollte man bemerken, dass die Approximationen für ein solches System, das heißt

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)),$$

ähnlich sind.

Wenn man weiß, dass es eine Lösung gibt, kann man diese Lösung mit Approximationen darstellen. Jedoch ist es nicht nur deswegen nützlich, sondern man kann auch hoffen, dass gute Approximationen auch tatsächlich zu einer Lösung konvergieren ohne dass man a-priori weiß, dass es eine Lösung gibt. Genauer gesagt, wenn man eine Folge von Approximationen $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat, die auf irgendeine passende Art eine Cauchy-Folge von Funktionen bilden, also $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$, kann man hoffen, dass diese Cauchy-Folge eine konvergente Folge bildet, also $\exists y_\infty$ mit $\|y_n - y_\infty\| \rightarrow 0$, und dass der Limes eine Lösung ist. Genau diesen Vorgang werden wir detailliert darstellen, um die Existenz einer Lösung nachzuweisen.

5.2 Numerische Methoden zur Approximation

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

und geben einige numerische Möglichkeiten, um die Lösung einer Differentialgleichung zu approximieren. Angenommen wird, dass f und y_0 gegeben sind. Die Funktion $x \mapsto y(x)$ wird gesucht. Die zwei einfachsten Verfahren sind die **Euler-Verfahren**.

Algorithmus 5.1 Das Euler-Vorwärts-Verfahren

Man nehme $h > 0$ eine kleine Zahl und setze $x_n = x_0 + nh$.

Man setze $y_0 = y_0$ und definiere iterativ:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 5.1.1 Hier steht nichts anderes als

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist eine Approximation der Ableitung in Vorwärtsrichtung.

Verwendet man eine Approximation der Ableitung in Rückwärtsrichtung, so folgt:

Algorithmus 5.2 Das Euler-Rückwärts-Verfahren

Man nehme $h > 0$ eine kleine Zahl und setze $x_n = x_0 + nh$.

Man setze $y_0 = y_0$ und man löse y_{n+1} iterativ aus der Gleichung:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Meistens braucht man ein zusätzliches numerisches Verfahren um y_{n+1} zu bestimmen.

In beiden Fällen definiert man die approximative Lösung \tilde{y} in zwischenliegenden Stellen durch lineare Interpolation:

$$y(x) = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} y_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} y_n \quad \text{für } x \in (x_n, x_{n+1}).$$

Daher auch der Name „Polygonzugverfahren“. Siehe auch Abbildung 5.1.

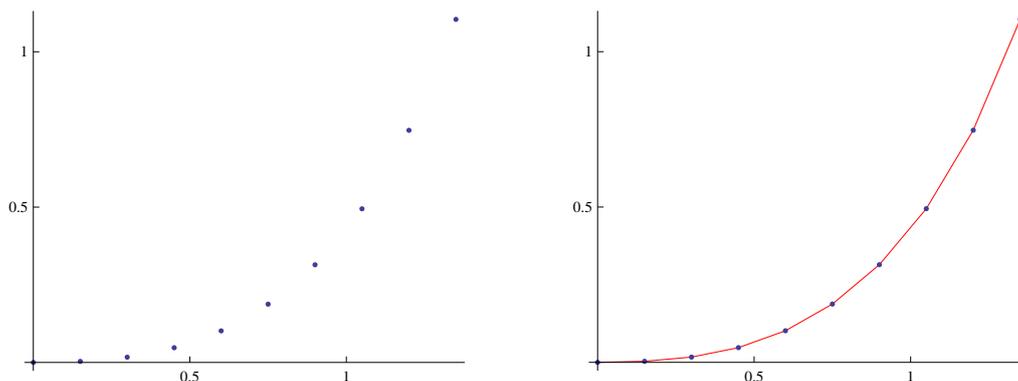


Abbildung 5.1: Links die diskreten Stellen aus der Approximation und rechts der Polygonzug

Bemerkung 5.2.1 Das vorwärts gerichtete Verfahren ist einfacher, da es explizit ist. Für die Rückwärtsrichtung muss man in jedem Schritt y_{n+1} implizit lösen. Leider ist die Vorwärtsrichtung instabiler.

Bemerkung 5.2.2 Cauchy hat wesentlich zum mathematischen Verständnis dieses Polygonzugverfahrens beigetragen und darum wird dieses Verfahren oft auch Euler-Cauchy-Verfahren genannt.

Bemerkung 5.2.3 Beide Eulerschen Polygonzugverfahren sind Einschrittverfahren. Das erste ist ein explizites, das zweite ein implizites Verfahren. Man kann sich selber davon überzeugen, dass

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y} + h \left(\frac{1}{2} f(x_n, \mathbf{y}_n) + \frac{1}{2} f(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \right)$$

oder

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h f \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \frac{\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}}{2} \right)$$

eine Lösung besser approximieren könnte. Beide Vorschläge wären implizit. Stattdessen kann man auch Mehrschrittverfahren anwenden. Zum Beispiel das **Zweischritt-Adams-Bashforth-Verfahren**:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \left(\frac{3}{2} f(x_n, \mathbf{y}_n) - \frac{1}{2} f(x_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}) \right).$$

Bei diesem Verfahren braucht man zwei Startwerte: \mathbf{y}_0 und \mathbf{y}_1 .

Bemerkung 5.2.4 Ein Verfahren, das bekannt ist für seine gute Konvergenz, ist das vierstufige **Runga-Kutta-Verfahren**:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}^{(1)} &= \mathbf{y}_n + h f(x_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(2)} &= \mathbf{y}_n + h f \left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \frac{1}{2}(\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}^{(1)}) \right), \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(3)} &= \mathbf{y}_n + h f \left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \frac{1}{2}(\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}^{(2)}) \right), \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(4)} &= \mathbf{y}_n + h f(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{(3)}), \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \frac{1}{6}\mathbf{y}_{n+1}^{(1)} + \frac{1}{3}\mathbf{y}_{n+1}^{(2)} + \frac{1}{3}\mathbf{y}_{n+1}^{(3)} + \frac{1}{6}\mathbf{y}_{n+1}^{(4)}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.5 Wie schnell ein solches Verfahren zu einer echten Lösung konvergiert, hängt ab von der Regularität der rechten Seite f und von der Größe ihrer Ableitungen. Grob gesagt macht Euler-Vorwärts in jedem Schritt einen Fehler der Größenordnung h^2 . Weil man in einem festen Intervall $1/h$ Schritte braucht, bekommt man bei diesem Verfahren einen Fehler von Ordnung h . Runga-Kutta macht für genügend glatte f in jedem Schritt einen Fehler der Größenordnung h^5 . Auf einem festen Intervall hat der Fehler Größenordnung h^4 .

Beispiel 5.3 Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem¹:

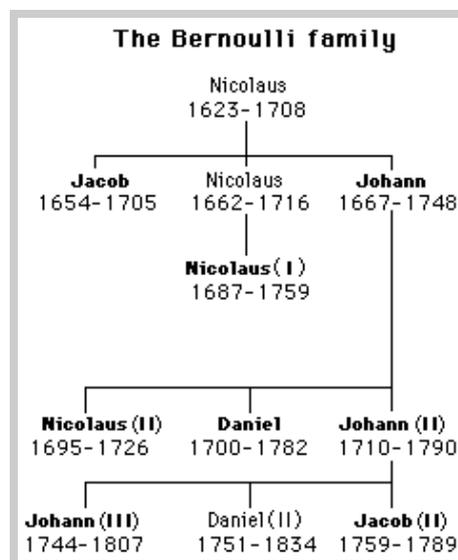
$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

¹Die Differentialgleichung $y'(x) = x^2 + y(x)^2$ ist eine der einfachsten, die man nicht mit elementaren Standardfunktionen lösen kann. Jacob Bernoulli (1654–1705) hat sich schon mit dieser Gleichung beschäftigt.

Es gibt übrigens 8 Bernoullis in der Mathematik. Dieser Jacob, auch Jacob I genannt, ist der bekannteste und ist derjenige nach dem die Differentialgleichung benannt worden ist. Mehr dazu finden Sie in

The MacTutor History of Mathematics archive,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/>

wo auch das Bild des Stammbaums rechts entnommen worden ist. Euler (1707–1783) hat studiert bei Johann Bernoulli und war befreundet mit Daniel Bernoulli.



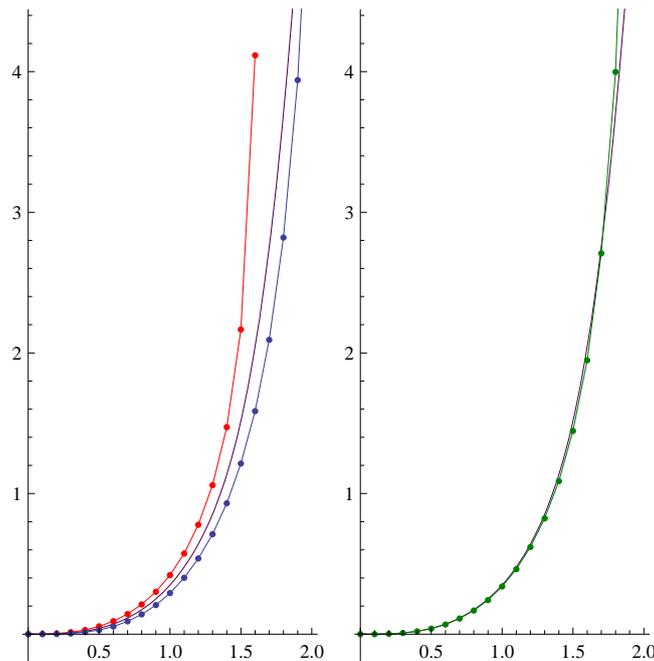


Abbildung 5.2: Links stehen Approximationen mit beiden Eulerschen Verfahren für Beispiel 5.3; Euler-Rückwärts ist in rot dargestellt. Rechts steht eine Runga-Kutta Approximation. Die Schrittgröße h ist jedesmal 0.1. Die Punkte stellen die diskreten Approximationen dar. Der Polygonzug entsteht, wenn man sie mit Geraden verbindet.

Wenn wir $h = .1$ nehmen und die beiden Eulerschen Verfahren und das Runga-Kutta Verfahren verwenden, bekommen wir die Bilder in Abbildung 5.2. Obwohl diese Differentialgleichung nicht zu den Standardtypen gehört, gibt es eine explizite Lösung mit Hilfe der Bessel-Funktionen. Auch diese Lösung ist eingezeichnet:

$$y(x) = \frac{x \left(J_{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) - J_{-\frac{5}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right)}{2J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right)} - \frac{1}{2x}.$$

J_ν ist die Bessel-Funktion² der ersten Sorte mit Index ν . Die Funktion y hat eine Asymptote bei $x \approx 2.00315$.

² J_ν ist die Bessel-Funktion der ersten Art von Index ν . Sie ist definiert für $\nu \notin \{-1, -2, \dots\}$ durch

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{t}{2} \right)^{\nu+2k}.$$

$\Gamma: \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Gamma-Funktion. Sie ist definiert für $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ durch

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \text{ falls } s > 0,$$

und weiter iterativ durch $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$. Es gilt $\Gamma(k+1) = k!$ für $k \in \mathbb{N}$.

5.3 Analytische Methoden zur Approximation

5.3.1 Potenzreihen

Wenn die Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ in dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

darstellbar ist als eine konvergente Potenzreihe:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x - x_0)^k (y - y_0)^n$$

dann kann man auch die Lösung als eine Potenzreihe darstellen:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k. \quad (5.1)$$

Diese Methode wurde von Euler in seinem Lehrbuch aus 1768 schon vorgestellt. Cauchy war derjenige, der bemerkte, dass nicht alle Funktionen als Reihe darstellbar sind. Der erste Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen wird Cauchy zugeschrieben. Er zeigte, dass die Eulerschen Polygonzüge für $h \downarrow 0$ zu einer Lösung des Anfangswertproblems konvergieren. Übrigens hat er auch mit diesem Reihenansatz die lokale Existenz für Anfangswertprobleme mit obigen Bedingungen beweisen können.

Beispiel 5.4 Wir betrachten wiederum das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Wenn wir eine Lösung der Form (5.1) haben mit $x_0 = 0$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) y_{k+1} x^k = x^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k \right)^2 = 1 x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k y_i y_{k-i} \right) x^k. \quad (5.2)$$

Der Anfangswert liefert $y_0 = y(0) = 0$. Man vergleicht die Koeffizienten in (5.2). Es folgt, dass

$$\begin{array}{ll} y_1 = 0 & \Rightarrow y_1 = 0 \\ 2y_2 = 0 & \Rightarrow y_2 = 0 \\ 3y_3 = 1 + y_1^2 & \Rightarrow y_3 = \frac{1}{3} \\ 4y_4 = 2y_1y_2 & \Rightarrow y_4 = 0 \\ 5y_5 = 2y_1y_3 + y_2^2 & \Rightarrow y_5 = 0 \\ 6y_6 = 2y_1y_4 + 2y_2y_3 & \Rightarrow y_6 = 0 \\ 7y_7 = 2y_1y_5 + 2y_2y_4 + y_3^2 & \Rightarrow y_7 = \frac{1}{3^2 \cdot 7} \\ 8y_8 = 2y_1y_6 + 2y_2y_5 + 2y_3y_4 & \Rightarrow y_8 = 0 \\ 9y_9 = 2y_1y_7 + 2y_2y_6 + 2y_3y_5 + y_4^2 & \Rightarrow y_9 = 0 \\ 10y_{10} = 2y_1y_8 + 2y_2y_7 + 2y_3y_6 + 2y_4y_5 & \Rightarrow y_{10} = 0 \\ 11y_{11} = 2y_1y_9 + 2y_2y_8 + 2y_3y_7 + 2y_4y_6 + y_5^2 & \Rightarrow y_{11} = \frac{2}{3^3 \cdot 7 \cdot 11} \\ \dots & \dots \end{array}$$

Man findet

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{13}{218295}x^{15} + \dots$$

Siehe Abbildung 5.3

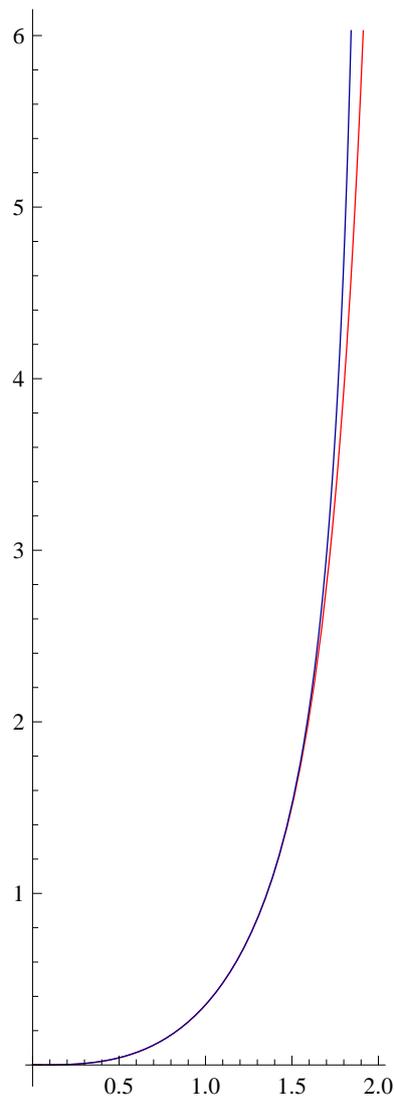


Abbildung 5.3: In rot das approximierende Polynom von Grad 15 und die echte Lösung in blau.

5.3.2 Picard-Iteration

Statt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.3)$$

zu betrachten, kann man auch versuchen eine Lösung zu finden von

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (5.4)$$

Lemma 5.5 Seien $f : [a, b] \times [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ und $y : [a, b] \rightarrow [\gamma, \delta]$ stetige Funktionen mit $x_0 \in (a, b)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- y ist differenzierbar und erfüllt das Anfangswertproblem (5.3).
- y erfüllt die Integral-Identität (5.4).

Beweis. (\Rightarrow) Es gilt

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

(\Leftarrow) Wenn $x \mapsto y(x)$ und $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig sind, ist auch $x \mapsto f(x, y(x))$ stetig und die rechte Seite von (5.4) ist stetig differenzierbar. Das heißt $x \mapsto y(x)$ ist stetig differenzierbar und

$$y'(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right)' = f(x, y(x)).$$

■

Algorithmus 5.6 [Picard Iteration]

Man definiere eine Funktionenfolge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mittels

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Beispiel 5.7 *Wiederum betrachten wir das Anfangswertproblem:*

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Die Integralgleichung wird

$$y(x) = 0 + \int_0^x (s^2 + y(s)^2) ds.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x s^2 ds = \frac{1}{3}x^3, \\ y_2(x) &= \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{1}{3}s^3 \right)^2 \right) ds = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 7}x^7, \\ y_3(x) &= \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 7}s^7 \right)^2 \right) ds = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Man vergleiche mit Beispiel 5.4.

Nur ganz selten kann man mehrere Schritte von der Picard-Iteration explizit berechnen. Wenn man zum Beispiel das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

betrachtet, dann folgt $y_0(x) = 1$ und

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x \sin(1) ds = 1 + x \sin(1), \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x \sin(1 + s \sin(1)) ds = 1 - \frac{\cos(1 + x \sin(1)) - \cos(1)}{\sin(1)} \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x \sin\left(1 - \frac{\cos(1 + s \sin(1)) - \cos(1)}{\sin(1)}\right) ds = \dots? \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist wohldefiniert, jedoch nicht explizit in einer Kombination bekannter Funktionen darzustellen.

5.4 Funktionalanalytisches

5.4.1 Fixpunkte

Die Approximationsvorgänge, die vorgestellt wurden, haben alle die folgende Form:

- Anfang: y_0 ist eine vernünftig gewählte Startfunktion;
- Iteration: $y_{n+1} = T(y_n)$ mit T einer Abbildung, die aus einer bekannten Approximation y_n eine neue Approximation y_{n+1} konstruiert.

In dem Fall, dass wir mit Funktionen y_n arbeiten, hofft man, dass y_0 so gewählt ist und der Operator T so konstruiert ist, dass die Funktionenfolge konvergiert. Wenn y_n nach y_∞ konvergiert und T stetig ist, dann sollte gelten, dass

$$y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = T(y_\infty).$$

In dem Fall, dass man y_0 als konstante Funktion $x \mapsto y_0$ nimmt und der Operator T wie folgt definiert wird,

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

würde Lemma 5.5 uns eine Lösung des Anfangswertproblems bringen, wenn wir eine stetige Funktion y_∞ hätten mit $y_\infty = T(y_\infty)$.

Definition 5.8 *Sie K eine Menge und $T : K \rightarrow K$ eine Abbildung. Man nennt $y \in K$ einen **Fixpunkt** von T , wenn $T(y) = y$.*

5.4.2 Vektorraum, Banachraum

Bevor wir genaue Sätze formulieren können, müssen wir das mathematische Werkzeug bereitlegen.

Definition 5.9 *Ein **Vektorraum** $(V, +, \cdot)$ über \mathbb{R} (oder \mathbb{C}) ist eine Menge mit einer Addition und mit einer Multiplikation mit Skalaren, die die folgenden Eigenschaften hat:*

1. V ist geschlossen: aus $v, w \in V$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ folgt $c_1 v + c_2 w \in V$;
2. $(V, +)$ ist eine Abelsche Gruppe.

3. Die Multiplikation erfüllt: $c(v+w) = cv + cw$, $(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$, $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$ und $1v = v$ für alle $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$.

Definition 5.10 Ein **normierter Vektorraum** $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ über \mathbb{R} ist ein Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$. Eine **Norm** ist eine Abbildung von V nach $[0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
2. $\forall c \in \mathbb{R} \forall v \in V : \|cv\| = |c| \|v\|$;
3. $\forall v, w \in V : \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Definition 5.11 Sei $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im normierten Vektorraum $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$.

- $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine **Cauchy-Folge** bezüglich $\|\cdot\|$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : n, m \geq M_\varepsilon \implies \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

- $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine **konvergente Folge** bezüglich $\|\cdot\|$, wenn es $v \in V$ gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq M_\varepsilon \implies \|v_n - v\| < \varepsilon.$$

Bemerkung 5.11.1 Cauchy-Folgen werden auch **Fundamentalfolgen** genannt.

Definition 5.12 Ein normierter Vektorraum $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist.

Bemerkung 5.12.1 Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

5.4.3 Folgen stetiger Funktionen

Für Funktionenfolgen $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es verschiedene Konvergenztypen:

- Punktweise Konvergenz von f_n zu f :

$$\forall x \in I, \varepsilon > 0 \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} : n > n_{x,\varepsilon} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Gleichmäßige Konvergenz von f_n zu f :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in I : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definition 5.13 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

- $C[a, b]$ ist die Menge aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- $C^1[a, b]$ ist die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt, f ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und es gibt $g \in C[a, b]$ mit $f' = g$ auf (a, b) .

Bemerkung 5.13.1 Definieren wir $\|\cdot\|_\infty$ durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \tag{5.5}$$

dann wird $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum.

Gleichmäßige Konvergenz und Konvergenz in $\|\cdot\|_\infty$ -Norm sind äquivalent. Das folgt aus der Äquivalenz folgender Aussagen:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in I : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > n_\varepsilon \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

In beide Zeilen steht: Für alle $x \in I$ und $n > n_\varepsilon$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Lemma 5.14 *Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis. Sei $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ so eine Funktionenfolge und sei f der Limes. Wir zeigen die Stetigkeit an der Stelle \tilde{x} .

Gleichmäßig konvergent bedeutet: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $x \in I$ gilt

$$n \geq n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $m = n_{\varepsilon/3}$. Dann findet man für alle $x \in I$, dass

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Weil $f_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $y \in I$ gilt:

$$|\tilde{x} - y| < \delta_\varepsilon \implies |f_m(\tilde{x}) - f_m(y)| < \varepsilon.$$

Dann folgt für $|\tilde{x} - y| < \delta_{\varepsilon/3}$, dass

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - f(y)| &\leq |f(\tilde{x}) - f_m(\tilde{x})| + |f_m(\tilde{x}) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + |f_m(\tilde{x}) - f_m(y)| + \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Korollar 5.15 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 5.15.1 *Stetige Funktionen auf kompakten Gebieten haben ein Maximum.*

Darum gilt $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$

Beweis. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ eine Cauchy-Folge. Das bedeutet, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$n, m \geq n_\varepsilon \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Wir müssen zeigen, dass es $f \in C[a, b]$ gibt, derart, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$n \geq n_\varepsilon \implies \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

1) Die Definition von f . Für jedes $x \in [a, b]$ ist $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Weil \mathbb{R} vollständig ist, ist eine solche Folge konvergent und wir können einen Limes f punktweise definieren:

$$f(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x).$$

Das heißt, für jedes $x \in [a, b]$ und $\varepsilon > 0$ existiert $f(x)$ und es gibt $m_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ mit

$$m \geq m_{x,\varepsilon} \implies |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2) Die gleichmäßige Konvergenz. Es gilt auch, wenn wir $n \geq n_\varepsilon$ und $m_x \geq \max(n_\varepsilon, m_{x,\varepsilon})$ nehmen, dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Also folgt

$$n > n_\varepsilon \implies \|f_n - f\|_\infty < 2\varepsilon,$$

(hätten wir bloß mit $\frac{1}{2}\varepsilon$ angefangen 😊) und dies bedeutet, dass f_n gleichmäßig nach f konvergiert:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

3) Die Stetigkeit des Grenzwertes. Das letzte Lemma liefert $f \in C[a, b]$. ■

Beispiel 5.16 Dieses Beispiel zeigt, dass man gleichmäßige Konvergenz braucht und das punktweise Konvergenz nicht ausreicht. Betrachte die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) = x^n$. Diese Folge konvergiert punktweise und der Grenzwert f_∞ ist

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind stetig; die Funktion f_∞ jedoch nicht.

Diese Funktionenfolge ist dann auch keine Cauchy-Folge in $C[0, 1]$. Dies kann man auch direkt zeigen: Wenn wir $m = 2n$ und $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in [0, 1]$ nehmen, dann folgt:

$$\|f_n - f_{2n}\|_\infty \geq |f_n(x_n) - f_{2n}(x_n)| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 6



Existenz nach Picard-Lindelöf

6.1 Vorbereitung für den Existenzsatz

6.1.1 Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Definition 6.1 Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ zwei normierte Vektorräume und A eine Teilmenge von V_1 .

- $T : A \subset V_1 \rightarrow V_2$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|v_1 - v_2\|_1 < \delta \implies \|T(v_1) - T(v_2)\|_2 < \varepsilon.$$

- $T : A \subset V_1 \rightarrow V_2$ heißt *gleichmäßig Lipschitz-stetig*, wenn gilt

$$\exists L > 0 : \|T(v_1) - T(v_2)\|_2 \leq L \|v_1 - v_2\|_1. \quad (6.1)$$

Bemerkung 6.1.1 Gleichmäßig Lipschitz-stetige Abbildungen sind gleichmäßig stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $\delta = L^{-1}\varepsilon$. Aus $\|x - y\|_1 < \delta$ folgt $\|T(x) - T(y)\|_2 < \varepsilon$.

Bemerkung 6.1.2 Oft nennt man gleichmäßig Lipschitz-stetige Funktionen oder Funktionale einfach nur Lipschitz-stetig. Wir sagen „ T ist **Lipschitz-stetig** auf A “, wenn T auf A gleichmäßig Lipschitz-stetig ist.

Bemerkung 6.1.3 L heißt **Lipschitz-Konstante**. Wenn $L < 1$ gilt, nennt man T eine **Kontraktion** oder **kontrahierende** Abbildung.

6.1.2 Ein Fixpunktsatz

Theorem 6.2 (Der Fixpunktsatz von Banach) Sei A eine nichtleere, abgeschlossene Menge eines Banachraums $(V, \|\cdot\|)$. Nehme an, $T(A) \subset A$ und $T : A \rightarrow V$ erfüllt (6.1) mit $L < 1$, das heißt, T ist eine Kontraktion. Dann gilt:

- Die Gleichung $T(v) = v$ hat genau eine Lösung \tilde{v} in A .
- Für jedes $v_0 \in A$ konvergiert die Folge $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_{n+1} = T(v_n)$ nach \tilde{v} . Es gilt sogar, dass

$$\|v_n - \tilde{v}\| \leq \frac{1}{1-L} \|v_n - v_{n+1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|v_0 - v_1\|.$$

Beweis. Man betrachtet die obige Folge und bemerkt, dass mit Induktion für jedes $v_0 \in A$ folgt, dass $v_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem hat man

$$\|v_n - v_{n+1}\| = \|T(v_{n-1}) - T(v_n)\| \leq L \|v_{n-1} - v_n\|$$

und es folgt auch hier mit Induktion für $m > n$, dass

$$\|v_m - v_{n+1}\| \leq L^{m-n} \|v_n - v_{n+1}\|.$$

Man hat außerdem, dass

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &= \|v_n - v_{n+1} + v_{n+1} - v_{n+2} + \cdots + v_{m-1} - v_m\| \leq \\ &\leq \|v_n - v_{n+1}\| + \|v_{n+1} - v_{n+2}\| + \cdots + \|v_{m-1} - v_m\| \leq \\ &\leq (1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-n}) \|v_n - v_{n+1}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{1-L} \|v_n - v_{n+1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|v_0 - v_1\|. \end{aligned}$$

Das bedeutet: $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Weil V ein Banachraum ist, ist $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sogar konvergent: es gibt $\tilde{v} \in V$ mit $\|v_n - \tilde{v}\| \rightarrow 0$. Weil A abgeschlossen ist, gilt $\tilde{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in A$. Auch hat man

$$\begin{aligned} \|v_n - \tilde{v}\| &= \left\| v_n - \lim_{m \rightarrow \infty} v_m \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|v_n - v_m\| \leq \\ &\leq \frac{1}{1-L} \|v_n - v_{n+1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|v_0 - v_1\|. \end{aligned}$$

Diese Lösung \tilde{v} ist eindeutig, denn wenn auch \hat{v} ein Fixpunkt in A wäre, folgt

$$\|\tilde{v} - \hat{v}\| = \|T(\tilde{v}) - T(\hat{v})\| \leq L \|\tilde{v} - \hat{v}\|$$

und $(1-L)\|\tilde{v} - \hat{v}\| \leq 0$ impliziert $\tilde{v} = \hat{v}$. ■

6.2 Lokale Existenz

Wir betrachten wiederum das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Bedingung 6.3 Nehmen wir an $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ und:

1. $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig;
2. f erfüllt die **Lipschitz-Bedingung**: es gibt $L_f \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $x \in [a, b]$ und $y, z \in [c, d]$ gilt

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L_f |y - z|. \quad (6.3)$$

Wenn wir diese Annahmen machen, können wir schon direkt einiges folgern:

- Weil stetige Funktionen auf kompakten Gebieten beschränkt sind, gibt es $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x, y)| \leq M \text{ für } (x, y) \in [a, b] \times [c, d]. \quad (6.4)$$

Für eine mögliche Lösung der Differentialgleichung bedeutet dies, dass $-M \leq y'(x) \leq M$ und somit auch, dass

$$y_0 - M|x - x_0| \leq y(x) \leq y_0 + M|x - x_0|, \quad (6.5)$$

jedenfalls wenn $y(x) \in [c, d]$ und $x \in [a, b]$ gilt. Siehe Abbildung 6.1.

- Es gibt $(\underline{x}, \bar{x}) \subset (a, b)$ mit $\underline{x} < x_0 < \bar{x}$ derartig, dass

$$y_0 \pm M |x - x_0| \in [c, d] \text{ für alle } x \in [\underline{x}, \bar{x}] \quad (6.6)$$

und

$$L_f |x - x_0| < 1 \text{ für alle } x \in [\underline{x}, \bar{x}]. \quad (6.7)$$

Diese erste Ungleichung sorgt dafür, dass für $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ der Kegel in (6.5) innerhalb des Rechtecks $[a, b] \times [c, d]$ bleibt. Die zweite Ungleichung braucht man für den Beweis des nächsten Theorems.

- Wir nehmen $h > 0$ derart, dass für alle $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ gilt

$$y_0 \pm M |x - x_0| \in [y_0 - h, y_0 + h] \subset [c, d].$$

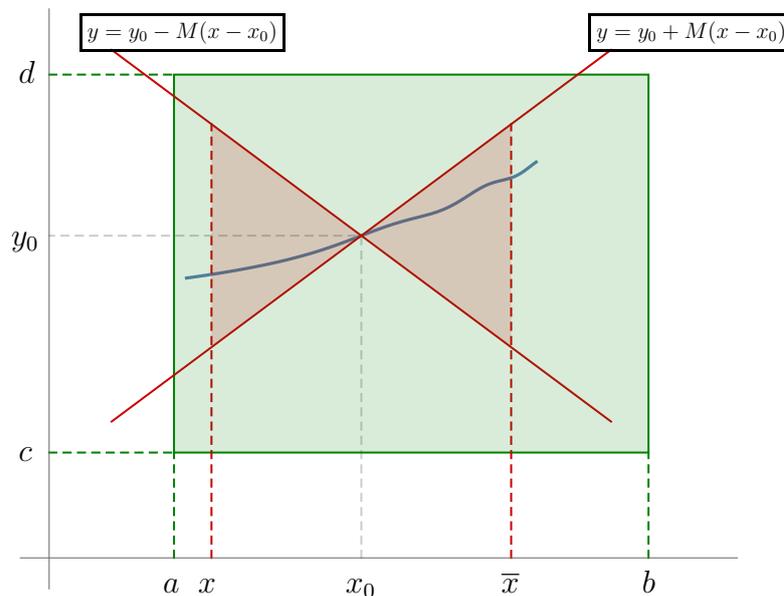


Abbildung 6.1: Durch die Beschränkung von $|y'|$ durch M verläuft jede Funktion aus der Picard-Iteration im roten Kegel und bleibt so für $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ im grünen Bereich.

Um den Fixpunktsatz anzuwenden, nehmen wir als Banachraum $(C[\underline{x}, \bar{x}], \|\cdot\|_\infty)$ und betrachten die Teilmenge

$$K = \{y \in C[\underline{x}, \bar{x}]; \|y - y_0\|_\infty \leq h\}. \quad (6.8)$$

Theorem 6.4 (Lokale Existenz nach Picard-Lindelöf) Wenn f Bedingung 6.3 erfüllt, dann gibt es $\underline{x} < x_0 < \bar{x}$ und genau eine Funktion $y \in C^1[\underline{x}, \bar{x}]$, die die folgenden Gleichungen erfüllt

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \text{ für alle } x \in [\underline{x}, \bar{x}], \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Bemerkung 6.4.1 Dieses Theorem liefert die lokale Existenz, „es gibt mindestens eine Lösung“, und auch die Eindeutigkeit, „es gibt höchstens eine Lösung“.

Bemerkung 6.4.2 Man kann dieses Theorem auch für Systeme erster Ordnung zeigen. Das Ergebnis ist wie folgt:

Nehme an $B \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, $\vec{f} : [x_u, x_o] \times \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig und erfüllt die Lipschitz-Bedingung:

$$\left| \vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z}) \right| \leq L |\vec{y} - \vec{z}| \text{ für alle } (x, \vec{y}), (x, \vec{z}) \in [x_u, x_o] \times \bar{B}.$$

Sei $(x_0, \vec{y}_0) \in (x_u, x_o) \times B$. Dann gibt es $\underline{x} < x_0 < \bar{x}$ derart, dass

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)), \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \in B, \end{cases}$$

lokal genau eine Lösung $\vec{y} \in C^1([\underline{x}, \bar{x}]; \mathbb{R}^n)$ hat.

Beweis. Sei T die Picard-Iteration für das Anfangswertproblem (6.2): Das heißt:

$$(T(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (6.10)$$

Sei K als in (6.8).

1. $T(K) \subset C[\underline{x}, \bar{x}]$. Weil f wohldefiniert und stetig ist auf $[\underline{x}, \bar{x}] \times [y_u, y_o]$, ist auch Ty stetig.
2. T auf K ist beschränkt: Wegen (6.4) und (6.3) folgt für $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ und $y \in K$, dass¹

$$\begin{aligned} |(T(y))(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{[x_0, x]} |f(s, y(s))| ds \leq \int_{[x_0, x]} M ds = M |x - x_0|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Man findet mit (6.6) für $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$:

$$-h \leq (T(y))(x) - y_0 \leq h.$$

Das heißt

$$y \in K \implies \|T(y) - y_0\|_\infty \leq h$$

und es folgt, dass $T(K) \subset K$.

3. $T : K \rightarrow K$ ist eine Kontraktion: Seien $y, z \in K$, dann gilt

$$\begin{aligned} |(T(y))(x) - (T(z))(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{[x_0, x]} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \leq \int_{[x_0, x]} L_f |y(s) - z(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{[x_0, x]} L_f \|y - z\|_\infty ds = L_f |x - x_0| \|y - z\|_\infty. \end{aligned}$$

¹Wir definieren

$$\begin{aligned} \text{falls } b \geq a: & \int_{[a, b]} g(s) ds = \int_a^b g(s) ds, \\ \text{falls } b < a: & \int_{[a, b]} g(s) ds = \int_b^a g(s) ds. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\left| \int_b^a g(s) ds \right| \leq \int_{[a, b]} |g(s)| ds.$$

Wegen (6.7) folgt, dass

$$\|T(y) - T(z)\|_\infty \leq c \|y - z\|_\infty.$$

4. Weil K eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge des Banachraums $C[\underline{x}, \bar{x}]$ ist, folgt aus dem Fixpunktsatz von Banach, dass es genau einen Fixpunkt \tilde{y} von T in K gibt.
5. Weil \tilde{y} stetig ist, gilt $x \mapsto f(x, \tilde{y}(x)) \in C[\underline{x}, \bar{x}]$ und

$$x \mapsto \tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \tilde{y}(s)) ds \in C^1[\underline{x}, \bar{x}].$$

Lemma 5.5 besagt, dass \tilde{y} sogar eine Lösung des Anfangswertproblems ist. ■

Bemerkung 6.4.3 *Das Wesentlichste im Beweis ist, dass die Lipschitz-Bedingung, welche wir annehmen für die Funktion $f : [x_u, x_o] \times [y_u, y_o] \rightarrow \mathbb{R}$, nämlich*

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v| \text{ für alle Stellen } (x, y) \in [x_u, x_o] \times [y_u, y_o],$$

dafür sorgt, dass der Operator $T : K \subset C[\underline{x}, \bar{x}] \rightarrow K$ eine Kontraktion ist für $x - \underline{x}$ und $\bar{x} - x_0$ genügend klein: Es gibt $c < 1$ mit

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq c \|y_1 - y_2\| \text{ für alle Funktionen } y_1, y_2 \in K.$$

Wir werden spätestens beim Existenzsatz von Peano sehen, dass diese Lipschitz-Bedingung nicht notwendig ist für die Existenz einer Lösung. Sie macht den Beweis von Picard-Lindelöf aber wesentlich einfacher als den zum Satz von Peano.

6.3 Globale Existenz

Wir betrachten wiederum das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Eine erste Erweiterung der lokalen Existenz bekommt man, wenn f die folgenden Bedingungen erfüllt:

Theorem 6.5 *Sei $(x_1, x_2) \ni x_0$ und $(y_1, y_2) \ni y_0$ und setze $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Nehme an $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt (Bedingung 6.3):*

- f ist stetig auf R ;
- f erfüllt die Lipschitz-Bedingung: es gibt $L > 0$ mit

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v| \text{ für alle } (x, u), (x, v) \in R.$$

Dann gibt es ein maximales Intervall $[x_-, x_+] \subset [x_1, x_2]$ mit $x_0 \in (x_-, x_+)$, und genau eine Lösung $y : [x_-, x_+] \rightarrow [y_1, y_2]$. Außerdem gilt

$$1) y \in C^1[x_-, x_+], \quad 2) (x_-, y(x_-)) \in \partial R \text{ und } 3) (x_+, y(x_+)) \in \partial R.$$

Hier ist ∂R der Rand von R .

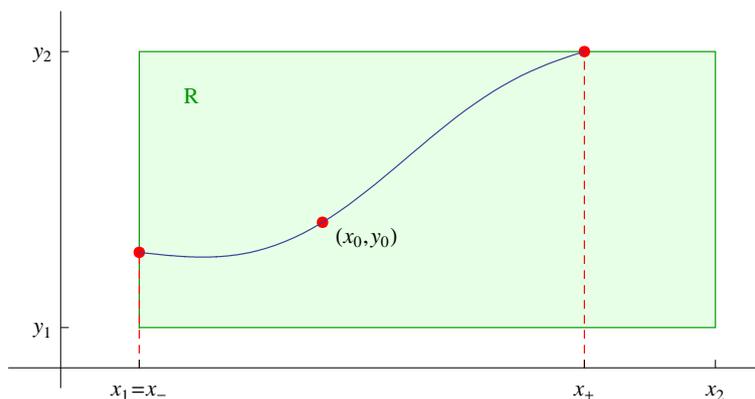


Abbildung 6.2: Eine Lösung kann nur am Rand aufhören.

Beweis. Aus der lokalen Existenz (Theorem 6.4) folgt, dass es $\tilde{x} > x_0$ gibt und ein $y \in C^1[x_0, \tilde{x}]$, welche die Differentialgleichung erfüllt.

Wenn $(\tilde{x}, \tilde{y}) := (\tilde{x}, y(\tilde{x})) \in \partial R$ gilt, sind wir fertig. Wenn $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^\circ$ gilt, dann können wir erneut ein Randwertproblem betrachten, nämlich

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(\tilde{x}) = \tilde{y}. \end{cases}$$

und finden aus der lokalen Existenz, dass es $\tilde{x}_a > \tilde{x}$ gibt und eine Lösung $y_a \in C^1[\tilde{x}, \tilde{x}_a]$, welche diese Gleichung erfüllt. Für $u \in C^1[\tilde{x}, \tilde{x}_a]$ gilt $\lim_{x \downarrow \tilde{x}} u'(x) = u'_r(\tilde{x})$ und weil f und y stetig sind, finden wir

$$y'_{a,r}(\tilde{x}) = \lim_{x \downarrow \tilde{x}} y'_a(x) = \lim_{x \downarrow \tilde{x}} f(x, y_a(x)) = f(\tilde{x}, y_a(\tilde{x})) = f(\tilde{x}, y(\tilde{x})).$$

Ebenso gilt

$$y'_\ell(\tilde{x}) = \lim_{x \uparrow \tilde{x}} y'(x) = \lim_{x \uparrow \tilde{x}} f(x, y(x)) = f(\tilde{x}, y(\tilde{x})),$$

y_a setzt y stetig differenzierbar fort und liefert eine Lösung $y \in C^1[x_0, \tilde{x}_a]$. In \tilde{x}_a können wir erneut schauen, wo sich $(\tilde{x}_a, y(\tilde{x}_a))$ befindet: innerhalb R° oder auf dem Rand ∂R . Wenn der Punkt auf dem Rand liegt sind wir fertig. Wir müssen also den Fall betrachten, dass diese Stelle sich jedesmal im Innern befindet. Dann gibt es eine wachsende Folge \tilde{x}_i mit $\tilde{x}_i \uparrow \tilde{x}_\infty$ und eine Lösung $y \in C^1[x_0, \tilde{x}_\infty)$ mit $\tilde{x}_\infty \in [x_1, x_2]$ maximal. Weil f beschränkt ist auf R , ist y' beschränkt auf R° und es existiert $\lim_{x \uparrow \tilde{x}_\infty} y(x)$. Dann existiert

$\lim_{x \uparrow \tilde{x}_\infty} y'(x) = \lim_{x \uparrow \tilde{x}_\infty} f(x, y(x))$ und es folgt, dass man y fortsetzen kann zu $y \in C^1[x_0, \tilde{x}_\infty]$. Wenn $(\tilde{x}_\infty, y(\tilde{x}_\infty)) \in \partial R$ gilt, sind wir fertig. Wenn $(\tilde{x}_\infty, y(\tilde{x}_\infty)) \in R^\circ$ gilt, wäre \tilde{x}_∞ nicht maximal.

Ähnlich können wir mit der lokalen Existenz eine Lösung $y \in C^1[\hat{x}, x_0]$ für $\hat{x} < x_0$ finden. Wie auch oben, findet man, dass man links und rechts zu einer Lösung $y \in C^1[\hat{x}, \tilde{x}]$ verbinden kann. ■

Theorem 6.6 (Globale Existenz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $(x_0, y_0) \in \Omega$. Nehme an, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt die Lipschitz-Bedingung

$$\exists L_\Omega > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_\Omega |y_1 - y_2| \text{ für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

Dann gibt es ein maximales (offenes) Intervall $I = (x_-, x_+)$ mit

$$-\infty \leq x_- < x_0 < x_+ \leq +\infty,$$

und genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (6.12) mit $(x, y(x)) \in \Omega$ für $x \in I$. Außerdem gilt

1. $y \in C^1(I)$,
2. $x_- = -\infty$ oder $\lim_{x \downarrow x_-} (x, y(x)) \in \partial\Omega$ oder $\lim_{x \downarrow x_-} \|y(x)\| = \infty$, und
3. $x_+ = \infty$ oder $\lim_{x \uparrow x_+} (x, y(x)) \in \partial\Omega$ oder $\lim_{x \uparrow x_+} \|y(x)\| = \infty$.

Bemerkung 6.6.1 Es kann sein, dass die Lösung sogar definiert ist bis in x_- oder x_+ . Die Aussage ist, dass es kein größeres offenes Existenzintervall gibt. Wenn f auch außerhalb des Gebietes Ω definiert ist, kann man möglicherweise sogar eine Lösung außerhalb von Ω finden. Selbstverständlich kann man ohne Annahmen keine Aussage machen, wie eine solche Erweiterung sich verhalten würde und ob sie außerhalb eindeutig ist.

Beweis. Aus Theorem 6.5 folgt, dass die Lösung in jedem Rechteck innerhalb Ω mindestens bis zum Rand des Rechtecks fortzusetzen ist. Weil Ω als offenes Gebiet mit Rechtecken aufzufüllen ist, folgt $\lim_{x \uparrow x_+} (x, y(x)) \in \partial\Omega$. ■

Wenn die Funktion f auch auf einem Teil des Randes von Ω definiert ist, aber nur auf kompakten Teilmengen von Ω die Lipschitz-Bedingung erfüllt, kann es sein, dass man die Lösung auf dem Rand $\partial\Omega$ fortsetzen kann. Wenn f da nicht Lipschitz-stetig ist, kann man die Eindeutigkeit dort verlieren. Es kann also passieren, dass man lokal eine eindeutige Lösung hat, die global nicht eindeutig ist. In Beispiel 6.8 geschieht genau dies.

Beispiel 6.7 Die rechte Seite des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2-y(x)^2}}, \\ y\left(\frac{2}{3}\right) = 1, \end{cases} \quad (6.13)$$

ist definiert für $x^2 + y^2 \leq 5$. Auf jede Kreisscheibe innerhalb $B_1(0, 0)$, also auf $B_r(0, 0)$ mit $r < \sqrt{5}$, ist f stetig und $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ beschränkt. Das bedeutet, dass das Anfangswertproblem genau eine Lösung hat, welche bis zum Rand $\partial B_r(0, 0)$ fortsetzbar ist. Weil solches für jedes $r < \sqrt{5}$ gilt, existiert die Lösung bis sie den Rand $\partial B_{\sqrt{5}}(0, 0)$ erreicht.

Beispiel 6.8 Beim Randwertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{y(x)}, \\ y(2) = \frac{9}{16}, \end{cases} \quad (6.14)$$

hat es lokal eine eindeutige Lösung, nämlich $y : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$y(x) = \frac{1}{16} (x^2 - 1)^2$$

Die Funktion $(x, y) \mapsto x\sqrt{y}$ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig auf $(-M, M) \times (\varepsilon, \infty)$ für alle $\varepsilon, M \in \mathbb{R}^+$. Innerhalb jedes Rechtecks $(-M, M) \times (\varepsilon, \infty)$ liefert auch Theorem 6.6 die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Betrachten wir $(-M, M) \times [0, \infty)$, dann gibt es mehrere Lösungen. Für $c \geq 0$ sind alle Funktionen $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$y_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} (x^2 - 1)^2 & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{für } -c < x < 1, \\ \frac{1}{16} (x^2 - c^2)^2 & \text{für } x \leq -c, \end{cases}$$

Lösung des Randwertproblems.

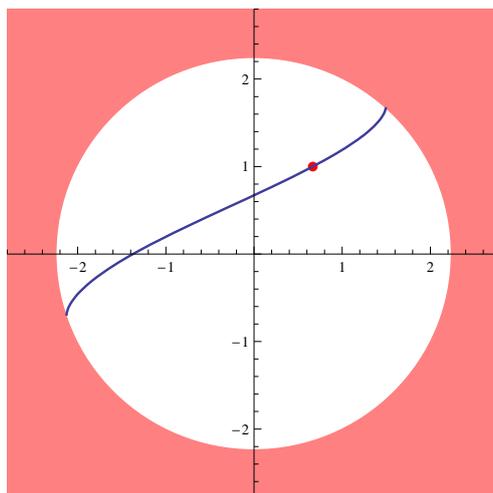


Abbildung 6.3: Skizze zu der Lösung aus Beispiel 6.7. Im roten Gebiet ist die Differentialgleichung nicht definiert. Die Lösung existiert bis zum Rand.

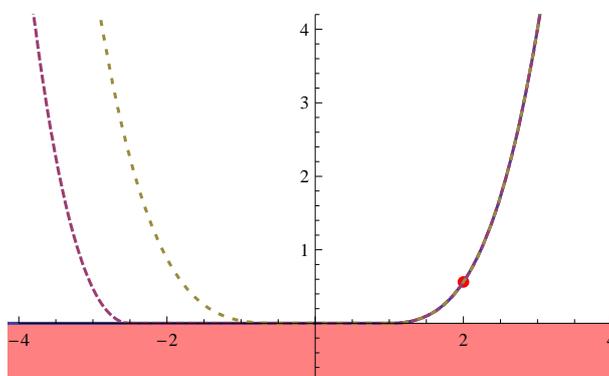


Abbildung 6.4: Skizzen zu einigen Lösungen aus Beispiel 6.8. Auch auf dem Rand existieren Lösungen; sie sind da aber nicht mehr eindeutig.

6.4 Das Lemma von Grönwall

Um präzisere Abschätzungen für eine Lösung und deren Existenzintervall zu bekommen, ist die folgende Ungleichung sehr nützlich.

Lemma 6.9 (Die Ungleichung von Grönwall) Seien $y, \alpha, \beta : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\beta \geq 0$. Wenn

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \text{ für alle } x \in [x_0, x_1], \quad (6.15)$$

dann gilt

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(t)dt} ds \text{ für alle } x \in [x_0, x_1]. \quad (6.16)$$

Bemerkung 6.9.1 Wenn $y(x) = \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)y(s)ds$ dann findet man, dass y sogar differenzierbar ist und dass y die lineare Differentialgleichung $y'(x) = \alpha'(x) + \beta(x)y(x)$ erfüllt. Die Funktion $y(x) = \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(t)dt} ds$ ist eine Lösung.

Beweis. Man definiere

$$u(x) = \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(t)dt\right). \quad (6.17)$$

Dann ist u differenzierbar und es gilt, weil $\beta \geq 0$, dass

$$\begin{aligned} u'(x) &= \beta(x) \left(y(x) - \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \right) \exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(t)dt\right) \leq \\ &\leq \beta(x)\alpha(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(t)dt\right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Man integriere (6.18) und findet

$$u(x) = u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x u'(s) ds \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s) \exp\left(-\int_{x_0}^s \beta(t)dt\right) ds.$$

Ersetzen wir u durch (6.17), so folgt

$$\int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(s)ds\right) \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s) \exp\left(-\int_{x_0}^s \beta(t)dt\right) ds$$

und anders dargestellt:

$$\int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s) \exp\left(\int_s^x \beta(t)dt\right) ds.$$

Mit (6.15) folgt

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s) \exp\left(\int_s^x \beta(t)dt\right) ds,$$

und das Ergebnis in (6.16). ■

6.4.1 Abschätzungen mit Grönwall

Korollar 6.10 Nehme an $f : [x_0, x_1] \times [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und $y_0 \in (y_1, y_2)$. Sei $M, L_\Omega \in \mathbb{R}^+$ so, dass:

1. für alle $x \in [x_0, x_1]$ gilt

$$|f(x, y_0)| \leq M,$$

2. für alle $(x, u), (x, v) \in [x_0, x_1] \times [y_1, y_2]$ gilt

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L_\Omega |u - v|.$$

Wenn $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist mit $y(x) \in [y_1, y_2]$ für alle $x \in [x_0, x_1]$ und derart, dass

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (6.19)$$

Dann gilt

$$|y(x) - y_0| \leq \frac{M}{L_\Omega} (e^{L_\Omega(x-x_0)} - 1) \text{ für } L_\Omega > 0.$$

Bemerkung 6.10.1 Weil f stetig ist, folgt, dass y in (6.19) differenzierbar ist. Dann liefert (6.19), dass y eine Lösung ist vom Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x (L_\Omega |y(s) - y_0| + |f(s, y_0)|) ds \leq \\ &\leq M(x - x_0) + \int_{x_0}^x L_\Omega |y(s) - y_0| ds. \end{aligned}$$

Für $L_\Omega > 0$ folgt mit der Ungleichung von Grönwall, dass

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0| &\leq M(x - x_0) + L_\Omega \int_{x_0}^x M(s - x_0) e^{L_\Omega(x-s)} ds = \\ &= \frac{M}{L_\Omega} (e^{L_\Omega(x-x_0)} - 1). \end{aligned}$$

Für $L_\Omega = 0$ folgt $|y(x) - y_0| \leq M(x - x_0)$. ■

In Paragraph 2.4 haben wir Lösungen verglichen. Diese Vergleichssätze kann man nicht geradeaus erweitern für vektorwertige Probleme. Mit dem Lemma von Grönwall sind die Abschätzungen viel grober, man kann jedoch auch ohne viel Aufwand auch Systeme betrachten. Siehe das nächste Korollar.

Korollar 6.11 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}: [x_0, x_1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und derart, dass $y_0 \in \Omega$. Sei $M, L_\Omega \in \mathbb{R}^+$ derart, dass

1. für alle $x \in [x_0, x_1]$ gilt

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}_0)\| \leq M,$$

2. für alle $(x, \vec{u}), (x, \vec{v}) \in [x_0, x_1] \times \bar{\Omega}$ gilt

$$\|\vec{f}(x, \vec{u}) - \vec{f}(x, \vec{v})\| \leq L_\Omega \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

Nehme an $\vec{y}: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{y}(x) \in \Omega$ für alle $x \in [x_0, x_1]$ ist eine stetige Funktion mit

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds.$$

Dann gilt

$$\|\vec{y}(x) - \vec{y}_0\| \leq \frac{M}{L_\Omega} (e^{L_\Omega(x-x_0)} - 1) \text{ für } L_\Omega > 0.$$

Beweis. Man schaue sich den Beweis von Korollar 6.10 an. ■

Bemerkung 6.11.1 Mit $\|\cdot\|$ ist die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n gemeint. Integrale von vektorwertigen Funktionen werden komponentenweise definiert:

$$\int_a^b \begin{pmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_n(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(s) ds \end{pmatrix}.$$

6.4.2 Stetigkeit bezüglich der Anfangswerte

Nach Hadamard ist ein Problem wohldefiniert, wenn es mindestens und höchstens eine Lösung hat, und dass, wenn man ein wenig am Problem rüttelt, sich auch wenig in der Lösung bewegt. Mit Hilfe vom Lemma von Grönwall kann man dies nun sogar für Systeme von Differentialgleichungen zeigen. Siehe auch Korollar 2.17. Also betrachten wir

$$\begin{cases} \vec{u}'(x) = \vec{f}(x, \vec{u}) & \text{für } x \in [0, \ell], \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Korollar 6.12 (Stetigkeit bezüglich der Anfangswerte) Sei $\vec{f} : [0, \ell] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und derart, dass es $L > 0$ gibt derart, dass

$$\left\| \vec{f}(x, \vec{u}) - \vec{f}(x, \vec{v}) \right\| \leq L \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad \text{für alle } (x, \vec{u}), (x, \vec{v}) \in [0, \ell] \times \mathbb{R}^n.$$

Seien $\vec{u}_a, \vec{u}_b : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen von (6.20) mit Anfangswerte $\vec{u}_{a,0}, \vec{u}_{b,0} \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\|\vec{u}_a(t) - \vec{u}_b(t)\| \leq e^{Lt} \|\vec{u}_{a,0} - \vec{u}_{b,0}\| \quad \text{für } x \in [0, \ell]. \quad (6.21)$$

Beweis. Man hat

$$\vec{u}_a(t) - \vec{u}_b(t) = \vec{u}_a(0) - \vec{u}_b(0) + \int_0^t \left(\vec{f}(s, \vec{u}_a(s)) - \vec{f}(s, \vec{u}_b(s)) \right) ds$$

und so folgt

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_a(t) - \vec{u}_b(t)\| &\leq \|\vec{u}_a(0) - \vec{u}_b(0)\| + \int_0^t \left\| \vec{f}(s, \vec{u}_a(s)) - \vec{f}(s, \vec{u}_b(s)) \right\| ds \\ &\leq \|\vec{u}_a(0) - \vec{u}_b(0)\| + L \int_0^t \|\vec{u}_a(s) - \vec{u}_b(s)\| ds. \end{aligned}$$

Das Lemma von Grönwall liefert die gewünschte Abschätzung. ■

6.4.3 Differentialgleichungen mit Existenzintervall \mathbb{R}

Lemma 6.13 Nehmen wir an $x_0 \in (x_1, x_2)$ und f ist wie folgt:

1. $f : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und
2. f erfüllt die Lipschitz-Bedingung auf $[x_1, x_2] \times \mathbb{R}$:

$$\forall x \in [x_1, x_2] \quad \forall u, v \in \mathbb{R} : |f(x, u) - f(x, v)| \leq L |u - v|. \quad (6.22)$$

Dann hat die Lösung von (6.2) $[x_1, x_2]$ als Existenzintervall.

Beweis. Nehmen wir $M = \max \{f(x, y_0); x \in [x_1, x_2]\}$ und

$$h = \frac{M}{L} \max(e^{L\Omega(x_2-x_0)}, e^{L\Omega(x_0-x_1)}),$$

dann folgt für $R = [x_1, x_2] \times [y_0 - h, y_0 + h]$, dass für das maximale Existenzintervall in R gilt $x_+ = x_2$ und $x_- = x_1$. Durch die Abschätzung von Korollar 6.10 gilt $y(x) \in (y_0 - h, y_0 + h)$ für $x \in [x_-, x_+]$. Aus Theorem 6.5 folgt $(x_+, y(x_+)) \in \partial R$ und $y(x_+) \in (y_0 - h, y_0 + h)$. ■

Korollar 6.14 Wenn $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, und $|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v|$ für alle $x, u, v \in \mathbb{R}$, dann hat die Lösung von (6.2) \mathbb{R} als Existenzintervall.

Beispiel 6.15 Betrachten wir

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{1 + t^2 + x(t)^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Weil $(t, x) \mapsto \sqrt{1 + t^2 + x^2}$ stetig ist auf \mathbb{R}^2 und die Lipschitz-Bedingung auf \mathbb{R}^2 erfüllt:

$$\left| \sqrt{1 + t^2 + x^2} - \sqrt{1 + t^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\theta}{\sqrt{1 + t^2 + \theta^2}} (x - y) \right| \leq |x - y|, \quad (6.23)$$

gibt es genau eine Lösung, die auf ganz \mathbb{R} existiert.

Wir haben für (6.23) den Mittelwertsatz benutzt, der uns ein $\theta \in (x, y)$ gibt für welches die obige Gleichung erfüllt ist. Man bemerke auch, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt{c + x^2}$ für $c \geq 1$ eine durch 1 beschränkte Ableitung hat.

Beispiel 6.16 Betrachten wir

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{1 + x(t)^4}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Die Funktion $x \mapsto \sqrt{1 + x^4}$ hat keine beschränkte Ableitung und man kann vermuten, dass sie nicht gleichmäßig Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} ist. Lokal ist die Lipschitz-Bedingung erfüllt und es gibt eine Lösung. Diese Lösung könnte aber nur ein endliches Existenzintervall besitzen.

Vergleichen wir mit

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dann bestätigt sich diese Vermutung. Die Lösung des letzten Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{1-t} \text{ mit } t \in (-\infty, 1).$$

Mit Theorem 2.12 findet man, dass $x(t) \geq y(t)$ für $t \in (0, T)$, wenn beide Lösungen auf dem Intervall existieren. Dies bedeutet, dass $t_+ \leq 1$.

Vergleicht man $x(t)$ für $t < 0$ mit

$$\begin{cases} z'(t) = 1, \\ z(0) = 1, \end{cases}$$

findet man $x(t) \leq z(t) = 1+t$ für $t \leq 1$, jedenfalls solange x existiert. Wenn x in -2 noch existieren würde, findet man $x(-2) \leq -1$ und wenn das gilt, können wir anschließend vergleichen mit

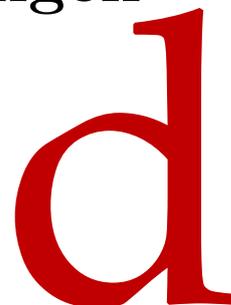
$$\begin{cases} w'(t) = w(t)^2, \\ w(-2) = -1. \end{cases}$$

Weil $w(t) = \frac{-1}{t+3}$ für $t > -3$ und $\lim_{t \downarrow -3} w(t) = -\infty$, folgt $t_- \geq -3$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 7

Nicht-lineare und linearisierte Systeme



7.1 Gleichgewichtspunkte

Wir werden uns mit Anfangswertproblemen der folgenden Form beschäftigen:

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)), \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Das heißt, für $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\vec{f} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ gegeben und wir suchen zum Anfangswert \vec{y}_0 eine Lösung $\vec{y} : I \mapsto \mathbb{R}^n$, definiert auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $(t, \vec{y}(t)) \in \Omega$ für $t \in I$. Diese Vektorschreibweise werden wir nicht durchziehen.

Wenn man sich den Beweis von Picard-Lindelöf anschaut, kann man sich davon überzeugen, dass auch für das System in (7.1) ein ähnliches Ergebnis folgt. Ohne nochmals zu kontrollieren, dass alle Details des Beweises auch genau so weitergehen, geben wir das Resultat.

Theorem 7.1 (Globale Existenz für Systeme) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $(x_0, y_0) \in \Omega$. Nehme an, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt die Lipschitz-Bedingung

$$\exists L_\Omega > 0 : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_\Omega \|y_1 - y_2\| \text{ für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in \Omega.$$

Dann gibt es ein maximales Intervall $I = (t_-, t_+)$ mit

$$-\infty \leq t_- < t_0 < t_+ \leq +\infty,$$

und genau eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (7.1) mit $(t, y(t)) \in \Omega$ für $t \in I$. Außerdem gilt

1. $y \in C^1(I)$,
2. entweder $t_- = -\infty$ oder $\lim_{t \downarrow t_-} (t, y(t)) \in \partial\Omega$ oder $\lim_{t \downarrow t_-} \|y(t)\| = \infty$, und
3. entweder $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \uparrow t_+} (t, y(t)) \in \partial\Omega$ oder $\lim_{t \uparrow t_+} \|y(t)\| = \infty$.

Wenn die Funktion f nicht explizit von t abhängt, nennt man das System in (7.1) autonom:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Definition 7.2 Wenn $y_p \in \mathbb{R}^n$ so ist, dass $f(y_p) = 0$, dann heißt y_p ein **Gleichgewichtspunkt** für (7.2).

Ein Gleichgewichtspunkt wird auch kritischer Punkt oder Ruhepunkt genannt. Man sieht direkt, dass ein Gleichgewichtspunkt für (7.2) eine konstante Lösung $y(t) = y_p$ liefert.

Beispiel 7.3 Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - y(t))x(t), \\ y'(t) = (1 + x(t) - y(t))y(t). \end{cases} \quad (7.3)$$

Setzen wir $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-y)x \\ (1+x-y)y \end{pmatrix}$. Weil diese Funktion f differenzierbar ist, ist lokal die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Für jeden Anfangswert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ existiert also eine Lösung $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, die definiert ist auf einem Intervall (t_-, t_+) und es gilt

$$t_+ = \infty \text{ oder } \lim_{t \uparrow t_+} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \infty.$$

Für das System findet man die Gleichgewichtspunkte, indem man

$$(2 - y)x = 0, \quad (1 + x - y)y = 0$$

löst. Die erste Gleichung liefert $y = 2$ oder $x = 0$. Dann gibt uns die zweite Gleichung folgendes:

$$\begin{aligned} y = 2 &\implies (1 + x - 2)2 = 0 \implies x = 1, \\ x = 0 &\implies (1 + 0 - y)y = 0 \implies y \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Das bedeutet drei Gleichgewichtspunkte: $(1, 2)$, $(0, 1)$ und $(0, 0)$. Diese Gleichgewichtspunkte sind gleichzeitig auch konstante Lösungen.

Definition 7.4 Wenn $t \mapsto x(t) : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung ist von $x'(t) = f(x(t))$ mit (t_-, t_+) maximal, dann nennt man

$$\{x(t); t_- < t < t_+\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine **Lösungskurve**.

Bemerkung 7.4.1 Eine Lösungskurve wird auch Trajektorie oder Orbit genannt.

Für ein autonomes System kann man die Eindeutigkeit noch etwas schärfer formulieren.

Lemma 7.5 Wenn $x \mapsto f(x)$ die Lipschitzbedingung erfüllt und $x_a(\cdot)$ und $x_b(\cdot)$ sind zwei Lösungen von $x'(t) = f(x(t))$, dann gilt für die zugehörigen Trajektorien entweder

- $\{\vec{x}_a(t); t_{a,-} < t < t_{a,+}\} = \{x_b(t); t_{b,-} < t < t_{b,+}\}$ oder
- $\{\vec{x}_a(t); t_{a,-} < t < t_{a,+}\} \cap \{x_b(t); t_{b,-} < t < t_{b,+}\} = \emptyset$.

Bemerkung 7.5.1 Man kann dieses Ergebnis auch so beschreiben, dass Trajektorien sich nicht schneiden.

Beweis. Nehmen wir an, es gibt $t_a \in (t_{a,-}, t_{a,+})$ und $t_b \in (t_{b,-}, t_{b,+})$ mit $x_a(t_a) = x_b(t_b)$. Dann gilt für die Funktion y , definiert durch $y(t) = x_b(t - t_a + t_b)$, dass sie die Differentialgleichung erfüllt mit $y(t_a) = x_b(t_b) = x_a(t_a)$. Weil das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_a) = x_a(t_a), \end{cases}$$

genau eine Lösung hat, folgt $x_b(t - t_a + t_b) = y(t) = x_a(t)$ und somit das Ergebnis. ■

Wir haben nun Gleichgewichtspunkte, die konstante Lösungen liefern und wissen, dass Lösungen mit anderen Anfangswerten existieren und eindeutig sind. Auch wenn man diese Lösungen nicht mit Hilfe expliziter Funktionen darstellen kann, möchten wir doch einige qualitative Aspekte genauer anschauen. Wir fangen an mit zwei Beispielen.

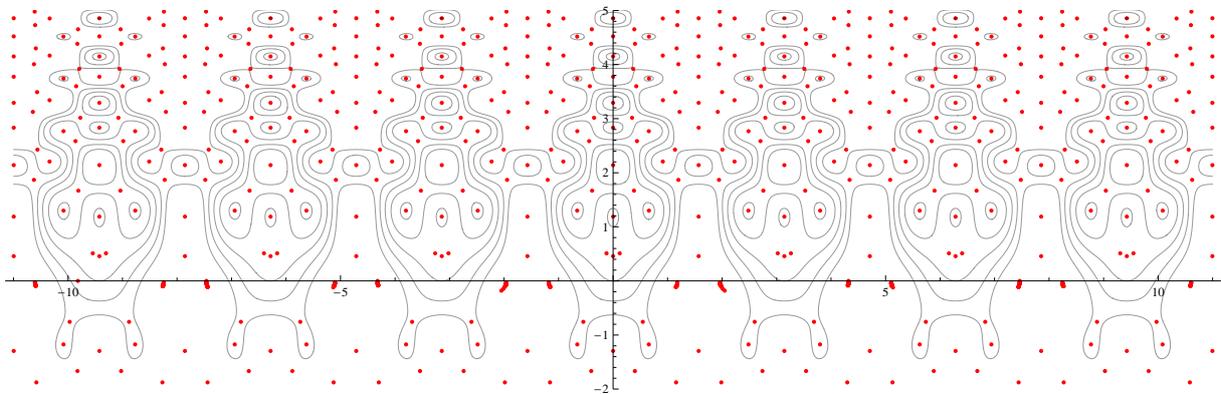


Abbildung 7.1: Skizze einiger Lösungskurven aus Beispiel 7.6 mit auch einigen Gleichgewichtspunkten. Das Beispiel ist inspiriert durch ein Beispiel im Buch von Borrelli und Coleman [1].

Beispiel 7.6 Betrachtet man das System

$$\begin{cases} x'(t) = \cos(y(t)) - 2y(t) \cos(y(t)^2) \cos(4x(t)), \\ y'(t) = 2 \sin(2x(t)) - 4 \sin(y(t)^2) \sin(4x(t)), \end{cases} \quad (7.4)$$

dann findet man (numerisch) sehr viele Gleichgewichtspunkte. Siehe Abbildung 7.1. Setzen wir

$$F(x, y) = \sin(y^2) \cos(4x) - \cos(2x) - \sin(y).$$

Wenn wir eine Lösung von (7.4) einsetzen und die Funktion $t \mapsto F(x(t), y(t))$ differenzieren, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(x(t), y(t)) &= \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y'(t) \right) \Big|_{(x, y) = (x(t), y(t))} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 \sin(y^2) \sin(4x) + 2 \sin(2x) \\ 2y \cos(y^2) \cos(4x) - \cos(y) \end{pmatrix} \Big|_{(x, y) = (x(t), y(t))} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} -4 \sin(y^2) \sin(4x) + 2 \sin(2x) \\ 2y \cos(y^2) \cos(4x) - \cos(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(y) - 2y \cos(y^2) \cos(4x) \\ 2 \sin(2x) - 4 \sin(y^2) \sin(4x) \end{pmatrix} \right) \Big|_{(x, y) = (x(t), y(t))} = 0. \end{aligned}$$

Damit finden wir, dass $F(x(t), y(t)) = c$ und das heißt, dass Trajektorien auch Niveaumengen von F sind.

Beispiel 7.7 Wir kommen nochmals zurück auf Beispiel 7.3, denn wir können noch mehr folgern. Die Gleichung $(2 - y)x = 0$ liefert genau die Stellen, bei denen $x'(t) = 0$ gilt, oder anders gesagt, wo die Lösungskurve vertikal verläuft. Ebenso gibt $(1 + x - y)y = 0$ die Stellen an, wo die Lösungskurve horizontal verläuft. Damit können wir ein grobes Bild erstellen wie die Trajektorien verlaufen. Siehe Abbildung 7.2. Wenn wir einige Trajektorien numerisch approximieren lassen, bekommen wir das Bild in Abbildung 7.3.

Abbildung 7.2: Skizze mit den Richtungen der Lösungskurven aus Beispiel 7.3.

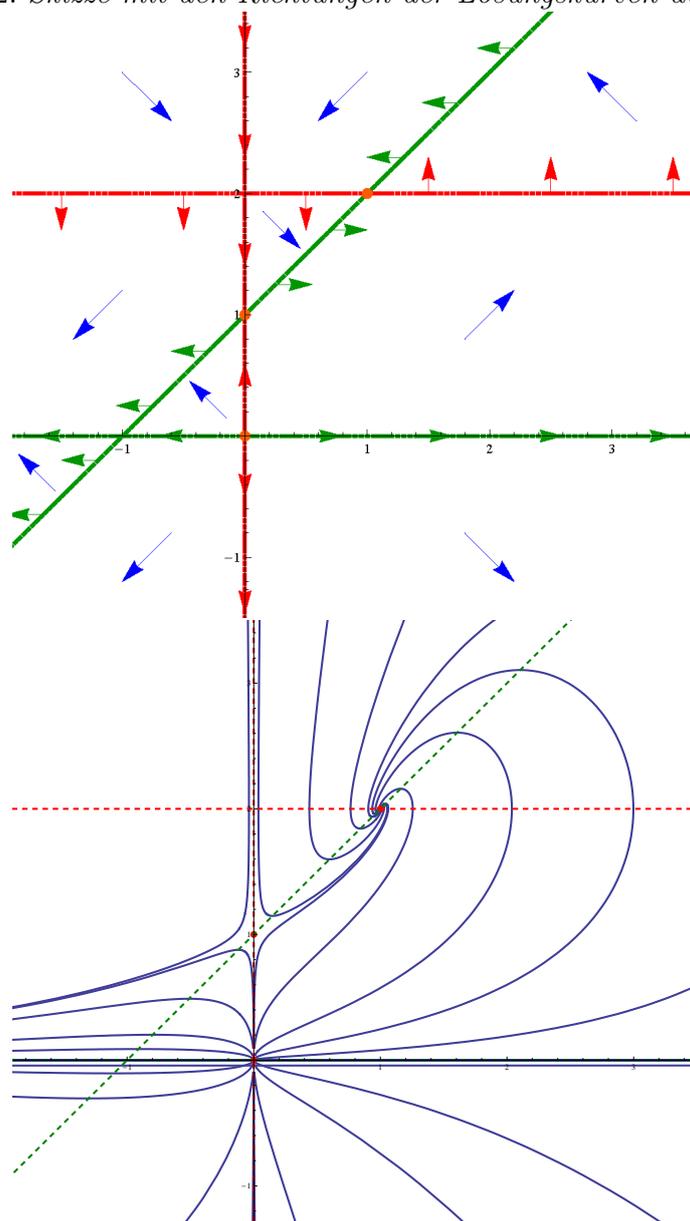


Abbildung 7.3: Skizze einiger numerisch approximierter Lösungskurven aus Beispiel 7.3. Man überlege sich mit Hilfe von Abbildung 7.2 in welche Richtung diese Trajektorien durchlaufen werden.

7.2 Linearisieren

Wenn wir Lösungen des Beispiels 7.3 in einer Umgebung eines Gleichgewichtspunktes betrachten, dann sieht das Bild ähnlich aus wie die Bilder bei linearen Systemen. Man könnte vermuten, dass ein lineares System die Lösung bei so einem Gleichgewichtspunkt approximieren könnte. Bevor wir irgendeinen Satz in dieser Richtung formulieren oder beweisen, geben wir erst eine Motivierung, welches lineare System das passende Verhalten liefern würde.

Definition 7.8 Sei x_p ein Gleichgewichtspunkt für das System

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (7.5)$$

und sei die Funktion f differenzierbar in einer Umgebung von x_p . Dann ist

$$y'(t) = \nabla f(x_p) \cdot y(t) \quad (7.6)$$

das um x_p linearisierte System zu (7.5).

Bemerkung 7.8.1 Das System in (7.6) kann man auch wie folgt schreiben

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die Idee bei der Linearisierung ist:

- Lösungen $t \mapsto x(t)$ von (7.6) zu vergleichen mit Lösungen $t \mapsto x_p + y(t)$ von (7.5).

Wenn wir $x_p + y(t)$ einsetzen in (7.5) und f sogar beschränkte zweite Ableitungen hat, dann finden wir

$$(x_p + y(t))' = y'(t) = \nabla f(x_p) \cdot y(t)$$

und

$$\begin{aligned} f(x_p + y(t)) &= f(x_p) + \nabla f(x_p) \cdot y(t) + \mathcal{O}(\|y(t)\|^2) = \\ &= \nabla f(x_p) \cdot y(t) + \mathcal{O}(\|y(t)\|^2). \end{aligned}$$

Man sieht, dass „nur“ ein quadratischer Term stört.

Für Beispiel 7.3 können wir die Vektorfelder mal vergleichen. Schauen Sie sich dazu Abbildung 7.4 an.

Beispiel 7.9 Das nicht-lineare System aus Beispiel 7.3

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - y(t))x(t), \\ y'(t) = (1 + x(t) - y(t))y(t). \end{cases} \quad (7.7)$$

hat drei Gleichgewichtspunkte, nämlich $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 2)$. Die bei diesen Punkten linearisierten Systeme sind:

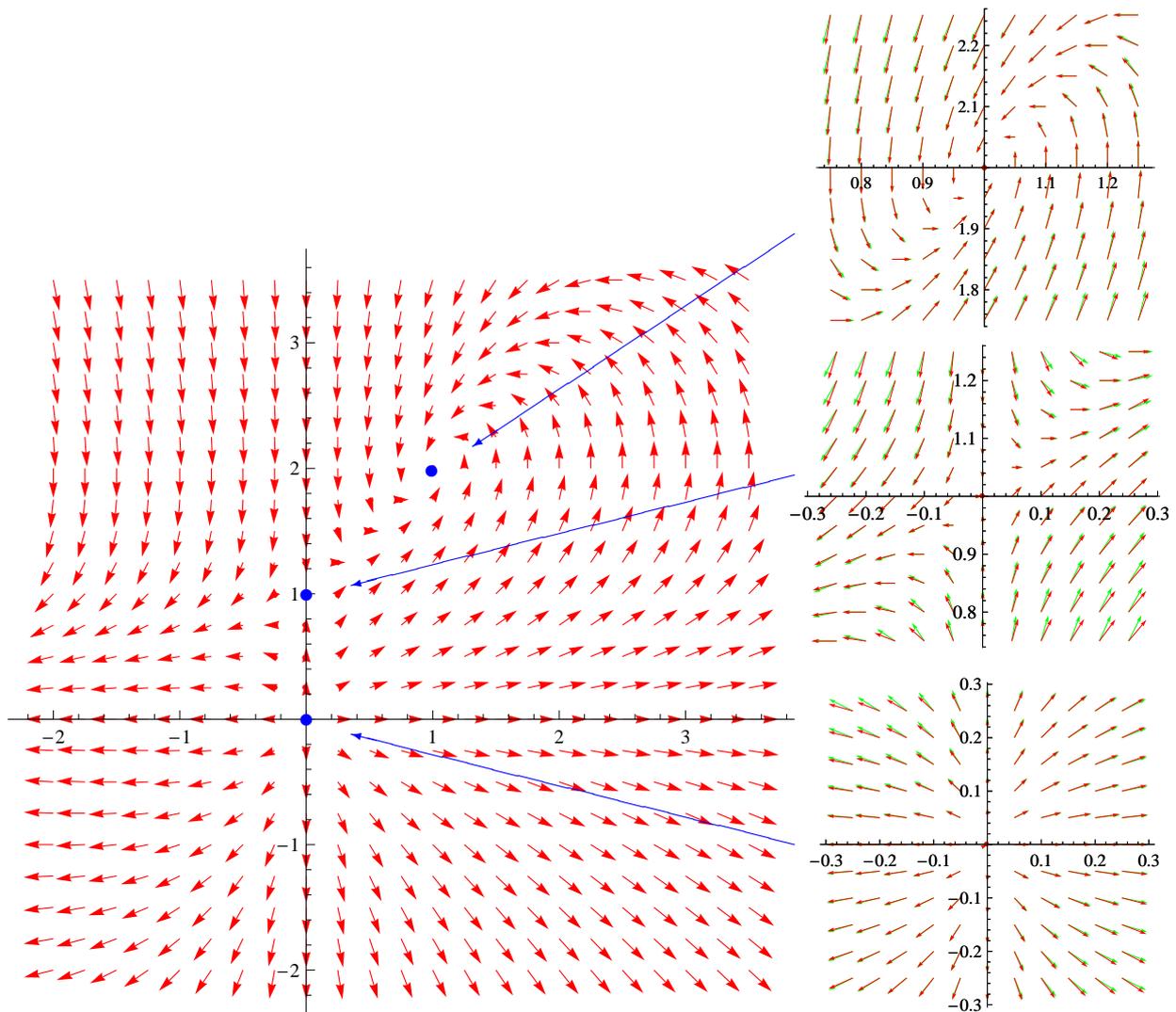


Abbildung 7.4: Das Vektorfeld zu Beispiel 7.3 und lokal verglichen mit den Vektorfeldern der Linearisierungen um $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,2)$. Die Vektorfelder zum linearisierten Problem sind in grün skizziert und sind kaum zu trennen von den roten.

- Für $x_p = (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla f(x_p) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2-y & -x \\ y & 1+x-2y \end{pmatrix}_{|(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann wird das linearisierte System wie folgt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

- Für $x_p = (0,1)$ findet man

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

- Für $x_p = (1, 2)$ findet man

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

7.3 Definition Stabilität für nicht-lineare Systeme

Sei Ω offen und sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Wir betrachten das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$x'(t) = f(x(t)). \quad (7.8)$$

Definition 7.10 Sei x_p ein Gleichgewichtspunkt für (7.8). Dieser Gleichgewichtspunkt heißt

- **stabil**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für jede Lösung x mit $x(0) \in B_\delta(x_p)$ gilt, dass $\{x(t); t \in \mathbb{R}^+\} \subset B_\varepsilon(x_p)$.
- **instabil**, wenn x_p kein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Stabil bedeutet also, dass man für jede Umgebung U_1 des Gleichgewichtspunktes eine (noch kleinere) Umgebung U_2 wählen kann so, dass jede Lösung, die in U_2 anfängt, innerhalb der ersten Umgebung U_1 bleibt. Weil „instabil“ die Verneinung dieser Eigenschaft ist, heißt das, dass es im Falle eines instabilen Gleichgewichtspunktes eine Umgebung U_1 gibt und man Anfangswerte beliebig nahe am Gleichgewichtspunkt nehmen kann, deren Lösungen trotzdem außerhalb U_1 geraten.

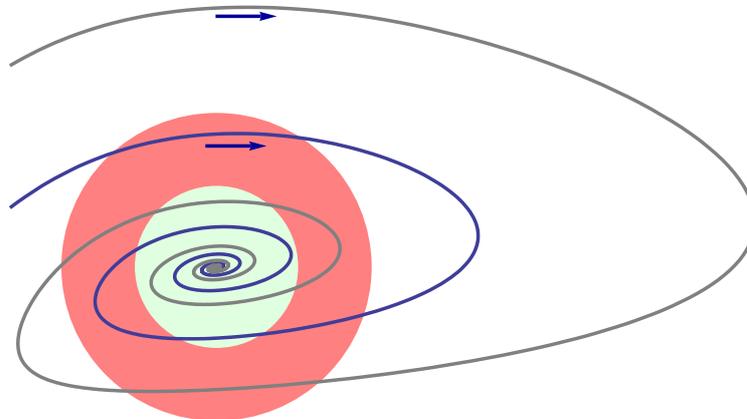


Abbildung 7.5: Ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Für jede (rote) Umgebung von x_p gibt es eine (grüne) Umgebung derart, dass wenn eine Trajektorie einmal innerhalb grün war, sie nie mehr außerhalb des roten Gebietes gelangt.

Definition 7.11 Sei x_p ein stabiler Gleichgewichtspunkt für (7.8). Dieser Gleichgewichtspunkt heißt

- **asymptotisch stabil**, wenn x_p ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist und zusätzlich gilt: es gibt $\varepsilon > 0$ derart, dass für jede Lösung mit $x(0) \in B_\varepsilon(x_p)$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p;$$

- **neutral stabil**, wenn x_p stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

Wenn man ein lineares System betrachtet, dann hat man nur einen Gleichgewichtspunkt, nämlich 0. Bei linearen Systemen ist lokales und globales Verhalten identisch. Einfacher gesagt: Wenn man auszoomt, sieht das Bild noch genau gleich aus. Diese Tatsache sorgt dafür, dass man Stabilität bei linearen Systemen relativ einfach formulieren kann. Bei nicht-linearen Systemen ist das globale Verhalten anders als das lokale. Das führt dazu, dass die Definitionen zur linearen Stabilität angepasst werden müssen und immer auf eine lokale Umgebung beschränkt werden. Wenn man jedoch genau hinschaut, bemerkt man, dass die Definitionen hier mit denen aus Paragraph 4.2 bei linearen Systemen übereinstimmen.

7.4 Stabilität von Gleichgewichtspunkten

Am schönsten wäre es, wenn die Stabilität des linearisierten Problems die Stabilität des Gleichgewichtspunktes im ursprünglichen Problem geben würde. Das ist leider nicht immer der Fall.

Theorem 7.12 Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x_p ein Gleichgewichtspunkt für (7.8). Setze $M = \nabla f(x_p)$.

1. Wenn für jeden Eigenwert λ von M gilt $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, dann ist x_p ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.
2. Wenn es mindestens einen Eigenwert λ von M gibt mit $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, dann ist x_p ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

Bemerkung 7.12.1 Im Fall, dass $\max\{\operatorname{Re}(\lambda); \lambda \text{ Eigenwert von } M\} = 0$ gilt, kann aus der Linearisierung keine Schlussfolgerung gezogen werden bezüglich der Stabilität des Gleichgewichtspunktes.

Der Beweis benötigt einige technische Ergebnisse aus der Matrixrechnung und wird auf nächste Woche verschoben.

Beispiel 7.13 Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(2 - x(t) - y(t)), \\ y'(t) = y(t)(1 - x(t)y(t)). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte findet man aus

$$x(2 - x - y) = 0 \text{ und } y(1 - xy) = 0.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} (x = 0 \text{ oder } 2 - x - y = 0) \\ \text{und} \\ (y = 0 \text{ oder } 1 - xy = 0). \end{aligned}$$

- $x = 0$ und $y = 0$ liefert $(0, 0)$.
- $x = 0$ und $1 - xy = 0$ liefert keine Lösung
- $2 - x - y = 0$ und $y = 0$ liefert $(2, 0)$.

- $2 - x - y = 0$ und $1 - xy = 0$ liefert via $y = \frac{1}{x}$ die Gleichungen $2 - x - \frac{1}{x} = 0$ und $2x - x^2 - 1 = 0$ den Gleichgewichtspunkt $(1, 1)$.

Aus $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2 - x - y) \\ y(1 - xy) \end{pmatrix}$ folgt

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ -y^2 & 1 - 2xy \end{pmatrix}.$$

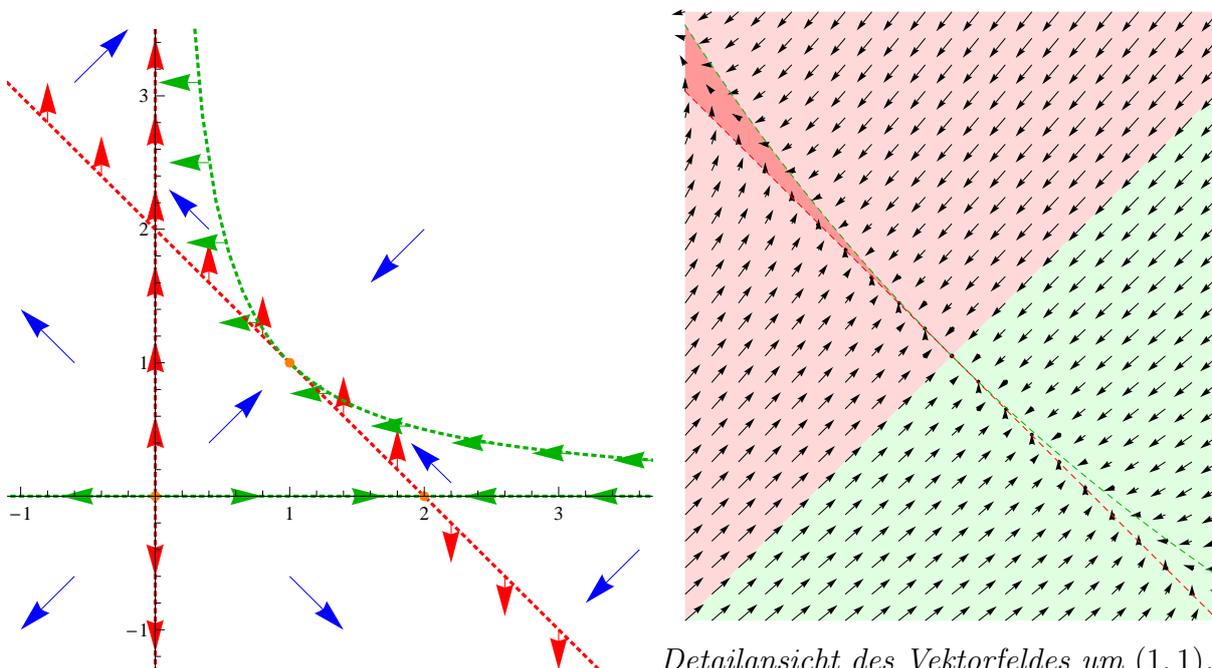
Die Matrizen in den Linearisierungen sind

$$\nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Das Theorem liefert uns Instabilität für die ersten beiden linearen Systeme als auch für die Gleichgewichtspunkte $(0, 0)$ und $(2, 0)$. Die Linearisierung beim dritten Gleichgewichtspunkt ist stabil, aber daraus können wir so direkt nichts über die Stabilität von $(1, 1)$ schließen. Schaut man sich genau das Vektorfeld um $(1, 1)$ an, dann sieht man, dass $(1, 1)$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.



Detailansicht des Vektorfeldes um $(1, 1)$.

Abbildung 7.6: Die Linearisierung um $(1, 1)$ gibt keine Auskunft bezüglich der Stabilität. Betrachtet man das Vektorfeld, dann kann man folgern, dass dieser Gleichgewichtspunkt instabil ist. Lokal kann man die Ebene in zwei Stücke teilen. Trajektorien im hellgrünen Gebiet rechts unten konvergieren für $t \rightarrow \infty$ nach $(1, 1)$. Trajektorien im rosa Gebiet links oben verschwinden aus dem Bild durch den schmalen roten Keil. Das heißt, dass man beliebig nahe an $(1, 1)$ Anfangswerte finden kann, für die die Lösung aus einer Umgebung von $(1, 1)$ verschwindet.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 8



Vergleich durch Linearisieren

8.1 Algebraische Vorbereitung zum Beweis des Stabilitätssatzes

8.1.1 Eine reelle alternative Jordan-Form

Bei der Linearen Algebra hat man gezeigt, dass jede Matrix ähnlich einer Jordan-Matrix ist. Siehe Theorem 3.14. Auch hier ist $M^{n \times n}(\mathbb{R})$ die Menge der $n \times n$ Matrizen mit reellen Koeffizienten.

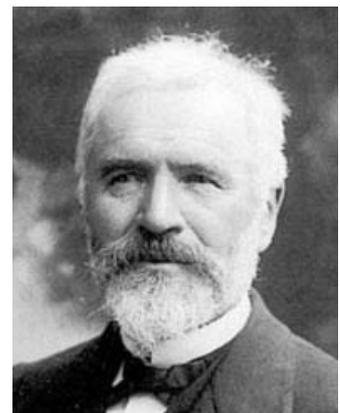
Lemma 8.1 (Reelle Alternative mit ε zur Jordan-Form)

Sei $\varepsilon > 0$. Für jede Matrix $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ gibt es $N, T \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ mit T invertierbar und derart, dass $M = TNT^{-1}$ und

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & O & \cdots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & N_m \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

mit reellen Eigenwerten λ_j in N_1 bis N_k :

$$N_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \varepsilon & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$



Marie Jordan

und mit Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ in N_{k+1} bis N_m :

$$N_m = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m & \varepsilon & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m & 0 & \varepsilon & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon & 0 \\ & \vdots & & & & & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Beweis. Die lineare Algebra lehrt uns, dass man jede Matrix auf Jordangestalt bringen kann. Wir fangen an mit dieser Jordangestalt und zeigen, dass man bei reellen Matrizen diese nah verwandte reelle Gestalt erreichen kann.

Schritt 1. Für den ersten Schritt bemerke man, dass komplexe Eigenwerte von reellen Matrizen als komplex konjugierte Paare erscheinen. Dies gilt auch für die Eigenvektoren und gegebenenfalls generalisierten Eigenvektoren. Dies beruht auf der folgenden Beobachtung:

- Wenn für $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{\varphi} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$(M - \lambda) \vec{\varphi} = 0,$$

dann gilt mittels komplex Konjugieren, also $z^* = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$, dass

$$(M - \lambda^*) \vec{\varphi}^* = ((M - \lambda) \vec{\varphi})^* = 0.$$

Also wenn $(\lambda, \vec{\varphi})$ Eigenwert/-vektor ist von M , so ist $(\lambda^*, \vec{\varphi}^*)$.

Ebenso folgt aus $(M - \lambda) \vec{\psi} = \vec{\varphi} \Leftrightarrow (M - \lambda^*) \vec{\psi}^* = \vec{\varphi}^*$, dass ähnliches gilt für generalisierte Eigenvektoren.

- Wenn für $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\vec{\varphi} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$(M - \lambda) \vec{\varphi} = 0,$$

dann folgt $\operatorname{Span}(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*) = \operatorname{Span}(\operatorname{Re} \vec{\varphi}, \operatorname{Im} \vec{\varphi})$ und

$$\begin{cases} M(\operatorname{Re} \vec{\varphi}) = \frac{1}{2} M(\vec{\varphi} + \vec{\varphi}^*) = \operatorname{Re} \lambda \operatorname{Re} \vec{\varphi} - \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im} \vec{\varphi}, \\ M(\operatorname{Im} \vec{\varphi}) = \frac{1}{2i} M(\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^*) = \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} \vec{\varphi} + \operatorname{Re} \lambda \operatorname{Im} \vec{\varphi}. \end{cases} \quad (8.4)$$

Ebenso folgt aus $(M - \lambda) \vec{\psi} = \vec{\varphi}$, dass

$$\begin{cases} M(\operatorname{Re} \vec{\psi}) = \operatorname{Re} \lambda \operatorname{Re} \vec{\psi} - \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Im} \vec{\psi} + \operatorname{Re} \vec{\varphi}, \\ M(\operatorname{Im} \vec{\psi}) = \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} \vec{\psi} + \operatorname{Re} \lambda \operatorname{Im} \vec{\psi} + \operatorname{Im} \vec{\varphi}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Für M eingeschränkt auf $W = \operatorname{Span}(B_2)$, mit $B_2 = \{\operatorname{Re} \varphi_m, \operatorname{Im} \varphi_m, \operatorname{Re} \psi_m, \operatorname{Im} \psi_m\}$ als Basis, findet man

$$M_{B_2} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m & 1 & 0 \\ -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m \\ 0 & 0 & -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Ordnet man die Basis auf \mathbb{R}^n , die man auf diese Art bekommt, so an, dass nach $\operatorname{Re} \varphi_m$ $\operatorname{Im} \varphi_m$ folgt, dann finden wir folgendes:

$$M = T_1 S (T_1)^{-1}$$

mit S eine Blockmatrix wie in (8.1) und mit Teilmatrizen wie in (8.2):

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & O & \cdots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & S_m \end{pmatrix}.$$

Man läßt die reellen Eigenwerte in S_1 bis S_k und hat dort die üblichen Jordankästchen:

$$S_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

In S_k bis S_{k+1} sammelt man paarweise die komplexen (generalisierten) Eigenwerte, wie soeben beschrieben, und man findet mit Hilfe von (8.4) und (8.5), dass:

$$S_m = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Schritt 2. Noch einen weiteren Schritt braucht man, um das Ergebnis in dem Lemma zu bekommen. Wir skalieren die Basisvektoren wie folgt: Die Vektoren, die aus generalisierten Eigenvektoren von Ordnung m erstellt worden sind, multiplizieren wir mit ε^m . Das führt zu $M = TNT^{-1}$, wobei N und S sich nur in den nebendiagonalen Jordan-1 Einträgen unterscheiden. Statt 1 hat M dort nun ε stehen. ■

8.1.2 Ein passendes Skalarprodukt

Definition 8.2 Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt für einen reellen Vektorraum V ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung 8.2.1 Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Bilinearform, wenn

$$\begin{aligned} x \mapsto \langle x, y \rangle & \text{ linear ist für jedes } y \in V, \text{ und} \\ y \mapsto \langle x, y \rangle & \text{ linear ist für jedes } x \in V. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Sie heißt symmetrisch, wenn

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ für jedes } x, y \in V. \tag{8.7}$$

Sie heißt positiv definit, wenn

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ für jedes } x \in V \text{ und } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{8.8}$$

Lemma 8.3 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Dann ist $x \mapsto \langle x, x \rangle^{1/2}$ eine Norm auf V .

Bemerkung 8.3.1 Man erinnere sich, dass für einen endlich dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind.

Korollar 8.4 Sei $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nehme an, $\operatorname{Re} \lambda_j$ hat m verschiedene Werte:

$$\begin{aligned} c_1 &:= \operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_{j_1} > \\ c_2 &:= \operatorname{Re} \lambda_{j_i+1} = \dots = \operatorname{Re} \lambda_{j_2} > \\ &\dots \\ c_m &:= \operatorname{Re} \lambda_{j_{m-1}+1} = \dots = \operatorname{Re} \lambda_n. \end{aligned}$$

Sei V_j ($j = 1, \dots, m$) der Teilraum, der die zu c_j gehörigen (generalisierten) Eigenvektoren umspannt, und sei $P_j : \mathbb{R}^n \rightarrow V_j$ die zugehörige Projektion mit $\sum_{j=1}^m P_j = I$. Sei $\varepsilon > 0$ und T und N wie in Lemma 8.1.

Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definiert durch

$$\langle x, y \rangle := x \cdot (TT^T)^{-1} y$$

ein Skalarprodukt und außerdem gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^m \langle P_j x, P_j x \rangle$$

und für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{j=1}^m (c_j - \varepsilon) \langle P_j x, P_j x \rangle \leq \langle x, Mx \rangle \leq \sum_{j=1}^m (c_j + \varepsilon) \langle P_j x, P_j x \rangle.$$

Beweis. Weil $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ sind die Projektionen P_j mit $\sum_{j=1}^m P_j = I$ eindeutig definiert.

Die Matrix TT^T ist symmetrisch und invertierbar. Ihre Eigenwerte λ sind positiv: Wegen Invertierbarkeit folgt $\lambda \neq 0$ und aus $TT^T \varphi = \lambda \varphi$ folgt

$$\|T^T \varphi\|^2 = \varphi \cdot TT^T \varphi = \varphi \cdot \lambda \varphi = \lambda \|\varphi\|^2 \text{ und } \lambda \geq 0.$$

Dann sind auch die Eigenwerte von $(TT^T)^{-1}$ positiv und auch $(TT^T)^{-1}$ ist positiv definit. Damit haben wir bewiesen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

Für $j_1 \neq j_2$ gilt

$$\langle P_{j_1} x, P_{j_2} y \rangle = P_{j_1} x \cdot (TT^T)^{-1} P_{j_2} y = T^{-1} P_{j_1} x \cdot T^{-1} P_{j_2} y = 0,$$

weil T^{-1} auf eine zu der Aufspaltung $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ passenden Basis transformiert.

Wir haben

$$\langle x, Mx \rangle = x \cdot (TT^T)^{-1} Mx = x \cdot (T^T)^{-1} NT^{-1} x = T^{-1} x \cdot NT^{-1} x$$

Die Matrix N betrachtet die Teilräume getrennt und es folgt

$$\begin{aligned} \langle x, Mx \rangle &= T^{-1} x \cdot NT^{-1} x = \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^m T^{-1} P_\ell x \cdot NT^{-1} P_j x = \\ &= \sum_{j=1}^m T^{-1} P_j x \cdot NT^{-1} P_j x = \sum_{j=1}^m \langle P_j x, MP_j x \rangle. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Das heißt, wir brauchen nur die einzelnen Kästchen N_j zu betrachten, um das Ergebnis zu zeigen. Wir definieren dazu die Verschiebungsoperatoren $\sigma : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\|\sigma y\| \leq \|y\|$ und es folgt mit Cauchy-Schwarz, dass

$$|y \cdot \sigma y| \leq \|y\| \|\sigma y\| \leq \|y\|^2 \quad (8.10)$$

und ähnliches für σ^2 . Bemerke, dass $\sigma^k y = 0$.

1. Der reelle Fall. Wir finden für N_j wie in (8.2), dass

$$y \cdot N_j y = y \cdot (\lambda y + \varepsilon \sigma y) = \lambda \|y\|^2 + \varepsilon y \cdot \sigma y$$

und mit (8.10) folgt

$$(\lambda - \varepsilon) \|y\|^2 \leq y \cdot N_j y \leq (\lambda + \varepsilon) \|y\|^2. \quad (8.11)$$

2. Der komplexe Fall. Man bemerke, dass die Beiträge von $\text{Im } \lambda$ sich aufheben, weil man bei $\text{Im } \lambda$ einmal ein Plus und einmal ein Minus hat:

$$\begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Re } \lambda & \text{Im } \lambda \\ -\text{Im } \lambda & \text{Re } \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \end{pmatrix} = \text{Re } \lambda (y_I^2 + y_{II}^2).$$

Es folgt für N_j wie in (8.3), dass

$$y \cdot N_j y = y \cdot (\text{Re } (\lambda) y + \varepsilon \sigma^2 y) = \text{Re } (\lambda) \|y\|^2 + \varepsilon y \cdot \sigma^2 y$$

und hier finden wir

$$(\text{Re } \lambda - \varepsilon) \|y\|^2 \leq y \cdot N_j y \leq (\text{Re } \lambda + \varepsilon) \|y\|^2. \quad (8.12)$$

Aus (8.11) und (8.12) folgt

$$(c_j - \varepsilon) \|T^{-1} P_j x\|^2 \leq T^{-1} P_j x \cdot N T^{-1} P_j x \leq (c_j + \varepsilon) \|T^{-1} P_j x\|^2.$$

Mit (8.9) ist der Beweis für dieses algebraische Ergebnis komplett. ■

8.1.3 Einige Beispiele

Beispiel 8.5 Betrachten wir das System $x'(t) = Mx(t)$ mit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix M hat die Eigenwerte $\{-1, 1, 1, 1 + 2i, 1 - 2i\}$. Für den Eigenwert 1 gilt $\#_{\text{geo}} = 1 < 2 = \#_{\text{alg}}$. Zugehörige Eigenvektoren sind

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}.$$

An der dritten Stelle ergänzen wir durch einen passenden generalisierten Eigenvektor, um zu einer Basis zu gelangen:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\}. \quad (8.13)$$

Auf der neuen Basis finden wir

$$M_B = T^{-1}MT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2i \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \exp(tM) &= \exp(tTM_B T^{-1}) = T \exp(tM_B) T^{-1} = \\ &= T \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} T^{-1} \end{aligned}$$

Die Spalten von T setzen sich zusammen aus den Koeffizienten der Vektoren in B .

Statt der Basis B können wir auch die folgende Basis verwenden:

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 2\varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (8.14)$$

Man findet dann

$$M_{\tilde{B}} = \tilde{T}^{-1}M\tilde{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \exp(tM) &= \exp\left(t\tilde{T}M_{\tilde{B}}\tilde{T}^{-1}\right) = \tilde{T} \exp(tM_{\tilde{B}}) \tilde{T}^{-1} = \\ &= \tilde{T} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & \varepsilon t e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \cos(2t) & -e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 & e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{pmatrix} \tilde{T}^{-1}. \end{aligned}$$

Die Spalten von \tilde{T} setzen sich zusammen aus den Koeffizienten der Vektoren in \tilde{B} .

Beispiel 8.6 Übrigens, wenn man im letzten Beispiel T^{-1} oder \tilde{T}^{-1} nicht berechnen möchte, kann man die Lösungen auch wie folgt schreiben.

Für $B = \{\varphi_{-1}, \varphi_1, \psi_1, \varphi_{1+2i}, \varphi_{1-2i}\}$ in (8.13):

$$x(t) = c_1 e^{-t} \varphi_{-1} + c_2 e^t \varphi_1 + c_3 e^t (\psi_1 + t \varphi_1) + c_4 e^{(1+2i)t} \varphi_{1+2i} + c_5 e^{(1-2i)t} \varphi_{1-2i}.$$

Hier gilt $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und $c_4, c_5 \in \mathbb{C}$, jedoch so, dass die Lösung reell ist.

Ebenso mit der Basis $\tilde{B} = \{\varphi_{-1}, \varphi_1, \varepsilon \psi_1, \xi, \eta\}$ in (8.14), mit $\xi = \operatorname{Re} \varphi_{1+2i}$ und $\eta = \operatorname{Im} \varphi_{1+2i}$, kann man alle Lösungen wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} \varphi_{-1} + c_2 e^t \varphi_1 + c_3 e^t (\varepsilon \psi_1 + \varepsilon t \varphi_1) + \\ &\quad + c_4 e^t (\cos(2t) \xi + \sin(2t) \eta) + c_5 e^t (\cos(2t) \eta - \sin(2t) \xi). \end{aligned}$$

Hier gilt $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$.

8.2 Der Beweis des Stabilitätssatzes

Nun haben wir genügend Werkzeug bereitgelegt, um Theorem 7.12 beweisen zu können.

Beweis von Theorem 7.12. Sei x_p der betreffende Gleichgewichtspunkt und sei $M = \nabla f(x_p)$ die Matrix aus der Linearisierung.

Der stabile Fall 1: Es gilt $\max \operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Setze $\varepsilon = -\frac{1}{2} \max \operatorname{Re} \lambda_j$ und man nehme zu diesem ε ein Skalarprodukt aus Korollar 8.4. Sei $x(t)$ eine Lösung und betrachte $y(t) = x(t) - x_p$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle y(t), y(t) \rangle &= 2 \langle y(t), x'(t) \rangle = 2 \langle y(t), f(x_p + y(t)) \rangle = \\ &= 2 \langle y(t), M(y(t)) \rangle + \mathcal{O} \|y(t)\|^3 \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^m -\varepsilon \langle P_j y(t), P_j y(t) \rangle + \mathcal{O} \|y(t)\|^3 \leq -\varepsilon \langle y(t), y(t) \rangle \end{aligned}$$

für $\|y(t)\|$ genügend klein. Es folgt

$$\langle y(t), y(t) \rangle \leq e^{-\varepsilon t} \langle y(0), y(0) \rangle.$$

Weil $x \mapsto \langle x, x \rangle^{1/2}$ und $\|\cdot\|$ äquivalente Normen sind, findet man auch, dass

$$\|x(t) - x_p\| = \|y(t)\| \leq C e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}.$$

Damit hat man die asymptotische Stabilität.

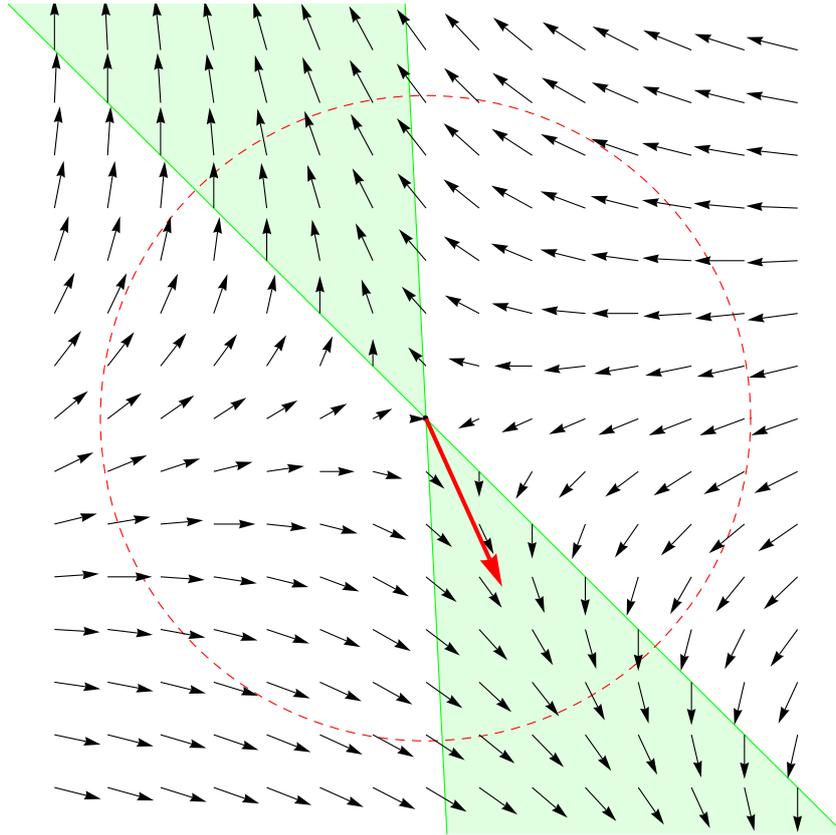


Abbildung 8.1: Idee beim Beweis der Instabilität. Am Rand des Kegels K (hier in grün dargestellt), und innerhalb des Kreises, zeigt das Vektorfeld weg von x_p und auf ∂K nach innen.

Der instabile Fall 2: Nehmen wir an, es gibt einen Eigenwert λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Sei nun λ_1 ein Eigenwert mit

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \max \{ \operatorname{Re} \lambda; \lambda \text{ Eigenwert von } M \}.$$

Auch setzen wir $\varepsilon = \min \{ \frac{1}{4}(c_1 - c_2), \frac{1}{4}c_1 \}$ mit c_j wie in Korollar 8.4. Wir nehmen als Anfangswert $x_p + \delta \operatorname{Re} \varphi_1$ mit $\delta > 0$, nennen V_1 den Teilraum zu den (generalisierten) Eigenwerten mit $\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \lambda_1$ und nehmen die Projektion P_1 auf V_1 wie in Korollar 8.4. Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt wie Korollar 8.4 es uns liefert. Definiere den Kegel K durch

$$K = \{ x_p + y \in \mathbb{R}^n; \langle (I - P_1)y, (I - P_1)y \rangle \leq \langle P_1y, P_1y \rangle \}.$$

Für $x_p + y \in K$ gilt

$$\langle y, y \rangle = \langle (I - P_1)y, (I - P_1)y \rangle + \langle P_1y, P_1y \rangle \leq 2 \langle P_1y, P_1y \rangle. \quad (8.15)$$

Man zeige nun, dass die Lösung mit $x(0) = x_p + \delta \operatorname{Re} \varphi_1$ das Gebiet $K \cap B_r(x_p)$ für $r > 0$, aber genügend klein, nur durch $\partial B_r(x_p)$ verlassen kann. Für $x_p + y \in \partial K$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f(x_p + y), P_1y \rangle - \langle f(x_p + y), (I - P_1)y \rangle &= \langle My, P_1y \rangle - \langle My, (I - P_1)y \rangle + \mathcal{O} \|y\|^3 = \\ &= NT^{-1}y \cdot T^{-1}P_1y - NT^{-1}y \cdot T^{-1}(I - P_1)y + \mathcal{O} \|y\|^3 \geq \\ &\geq (c_1 - \varepsilon) \langle P_1y, P_1y \rangle - (c_2 + \varepsilon) \langle (I - P_1)y, (I - P_1)y \rangle + \mathcal{O} \|y\|^3 = (*) \end{aligned}$$

Wegen $(c_1 - \varepsilon) - (c_2 + \varepsilon) > \varepsilon$ (8.15) folgt

$$(*) \geq \varepsilon \langle P_1 y, P_1 y \rangle + \mathcal{O} \langle P_1 y, P_1 y \rangle^{3/2} > 0$$

für $x_p + y \in \partial K \cap B_r(x_p)$ mit r genügend klein. Anders gesagt, das Vektorfeld zeigt nach innen auf den Rand des Kegels. Siehe Abbildung 8.1. Weil

$$\begin{aligned} \langle f(x_p + y), P_1 y \rangle &\geq (c_1 - \varepsilon) \langle P_1 y, P_1 y \rangle + \mathcal{O} \|y\|^3 \geq \\ &\geq 2\varepsilon \langle P_1 y, P_1 y \rangle + \mathcal{O} \langle P_1 y, P_1 y \rangle^{3/2} > \varepsilon \langle P_1 y, P_1 y \rangle \end{aligned}$$

für $x_p + y \in K \cap B_r(x_p)$ mit $r > 0$ genügend klein folgt, dass

$$\|x(t) - x_p\| \geq C e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \|x(0) - x_p\|,$$

jedenfalls wenn $x(t) \in K \cap B_r(x_p)$. Das bedeutet Instabilität. ■

Bemerkung 8.6.1 Das Bild in Abbildung 8.1 möchte nur die Idee des Beweises darstellen. Wenn der größte Realteil von mehreren komplexen Eigenwerten angenommen wird, ist das tatsächliche Bild komplizierter. Siehe zum Beispiel Abbildung 8.2.

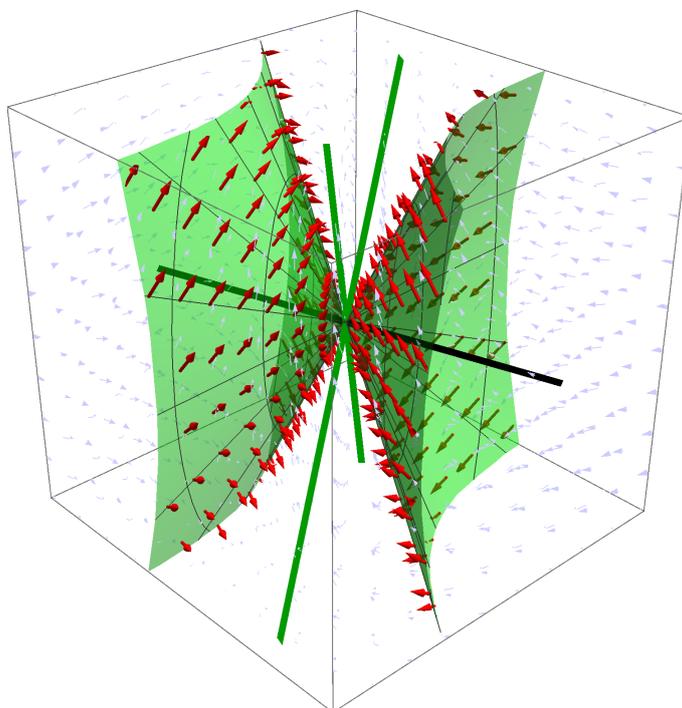


Abbildung 8.2: Skizze in drei Dimensionen für den Fall, dass $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ und $\lambda_3 < 0$. Der „Kegel“ K befindet sich zwischen beiden grünen Mannigfaltigkeiten. Die grünen Linien gehen durch $\operatorname{Re} \varphi_1$, beziehungsweise $\operatorname{Im} \varphi_1$; die schwarze Linie geht durch φ_3 .

8.3 Linearisierungssatz

Ohne Beweis zitieren wir Theorem 7.1 auf Seite 244 von Hartmanns Buch [2]:

Theorem 8.7 Sei $f : B_\varepsilon(x_p) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $f(x_p) = 0$. Wenn $\nabla f(x_p)$ keinen Eigenwert mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ hat, dann gibt es Umgebungen U von x_p und V von 0 und eine stetige bijektive Abbildung $h : V \rightarrow U$, welche die Trajektorien der linearen Gleichung $y'(t) = \nabla f(x_p) y(t)$ in V in die Trajektorien der nichtlinearen Gleichung $x'(t) = f(x(t))$ in U überführt.

Eine Illustration dieses Theorems finden Sie in Abbildung 8.3.

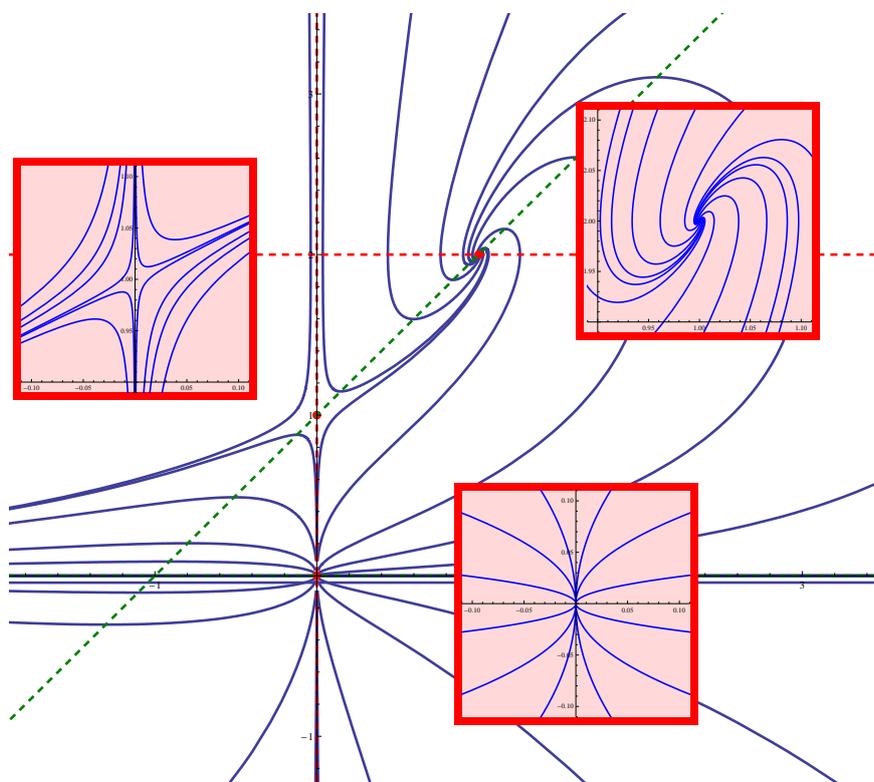


Abbildung 8.3: Als Illustration von Theorem 8.7 nochmals Abbildung 7.3 mit zusätzlich einigen Skizzen von Lösungen der linearisierten Systeme.

8.4 Abschätzungen

Wir betrachten für $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ das System

$$\begin{cases} \vec{u}'(t) = F(\vec{u}(t)), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Lemma 8.8 Wenn $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\|F(\vec{x})\| \leq M(1 + \|\vec{x}\|)$, dann gilt für die Lösung \vec{u} von (8.16), dass sie höchstens exponentiales Wachstum hat. Außerdem ist \mathbb{R} das maximale Existenzintervall von \vec{u} .

Beweis. Wegen des Satzes von Picard-Lindelöf gibt es ein Intervall $(a, b) \ni 0$ und eine Lösung $\vec{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (8.16).

Wir finden auch, mit Hilfe von $2s \leq 1 + s^2$, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{u}(t)\|^2 &= 2\vec{u}(t) \cdot \vec{u}'(t) = 2\vec{u}(t) \cdot F(\vec{u}(t)) \\ &\leq 2M \|\vec{u}(t)\| (1 + \|\vec{u}(t)\|) \leq M (1 + 3\|\vec{u}(t)\|^2) \end{aligned}$$

und dann auch

$$\frac{d}{dt} (e^{-3Mt} \|\vec{u}(t)\|^2) \leq M e^{-3Mt}.$$

Integrieren wir dies von 0 bis $t \in (0, b)$, so folgt

$$e^{-3Mt} \|\vec{u}(t)\|^2 - \|\vec{u}_0\|^2 \leq \int_0^t M e^{-3Ms} ds = \frac{1}{3} (1 - e^{-3Mt}).$$

Dann gilt

$$\|\vec{u}(t)\|^2 \leq e^{3Mt} \|\vec{u}_0\|^2 + \frac{1}{3} (e^{3Mt} - 1). \quad (8.17)$$

Für $t < 0$ verwendet man

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}(t)\|^2 \geq -M (1 + 3\|\vec{u}(t)\|^2)$$

und findet mit ähnlichen Schritten, dass

$$\|\vec{u}(t)\|^2 \leq e^{-3Mt} \|\vec{u}_0\|^2 + \frac{1}{3} (e^{-3Mt} - 1). \quad (8.18)$$

Wenn (a, b) das maximale Existenzintervall ist, dann gilt, dass

$$\lim_{t \uparrow b} \|\vec{u}(t)\| = \lim_{t \downarrow a} \|\vec{u}(t)\| = \infty.$$

Durch die Schranken in (8.17) und (8.18) folgt der Widerspruch, wenn $b < \infty$ oder $a > -\infty$. ■

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 9

Lotka, Volterra und Lyapunov



9.1 Anwendungen in der Populationsdynamik

Wenn man zwei zusammenlebende Lebensformen betrachtet, die durch ihre Anwesenheit Einfluss auf die Größe der gegenseitigen Populationen nehmen, modelliert man solche Probleme oft durch quadratische Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) = R_1(x(t), y(t)) x(t), \\ y'(t) = R_2(x(t), y(t)) y(t). \end{cases}$$

Es hängt von R_1, R_2 ab, welcher Typ beschrieben wird mit dem System. Wir stellen einige Möglichkeiten vor.

9.1.1 Das Räuber-Beute oder Lotka-Volterra Modell

In der englisch-sprachigen Literatur ist dieses Lotka-Volterra¹ Modell bekannt unter dem Namen „predator-prey“. Die Zahl der Räuber (z.B. Mäusebussarde) wird durch x beschrieben. Ohne Anwesenheit von Beute sterben sie aus mit Rate α . Wenn es Beute (Nagetiere) gibt, deren Zahl durch y beschrieben wird, kommt ein Term βy für den Zuwachs dazu. Dies liefert die Differentialgleichung $x'(t) = (-\alpha + \beta y(t)) x(t)$. Nun betrachten wir die Beute. Diese Beute hat einen natürlichen Zuwachs mit Rate γ und wird reduziert durch die anwesenden Räuber mit Faktor β . Die Konstanten α, β, γ und δ sind positiv. Das bringt uns auf

$$\begin{cases} x'(t) = (-\alpha + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - \delta x(t)) y(t). \end{cases} \quad (9.1)$$

Weil die rechte Seite als Funktion von (x, y) differenzierbar ist, hat dieses System für jeden Anfangswert $(x(0), y(0))$ eine eindeutige Lösung. Das bedeutet auch, dass wenn $x(t) \neq 0$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt, $x(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ähnliches gilt für y .

Der nichttriviale Gleichgewichtspunkt ist

$$(x, y) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

¹Volterra war ein italienischer Mathematiker, der diese Modelle studiert hat in *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (1931, Lektionen über die mathematische Theorie über den Kampf ums Leben). Aufgefordert dazu wurde er von seinem Schwiegersohn, der als Biologe den Fischbestand im adriatischen Meer während und nach dem ersten Weltkrieg studierte. Lotka war ein amerikanischer Biologe, der unabhängig zu ähnlichen Modellen kam.

Linearisiert man bei diesem Punkt, findet man

$$\nabla f \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta/\delta \\ -\alpha\delta/\beta & 0 \end{pmatrix}$$

und das ist ein Zentrum. Weil $\operatorname{Re} \lambda = 0$ kann man keine sofortige Aussage machen zu der Stabilität oder zum Bild der Trajektorien. Auch Theorem 8.7 ist nicht anwendbar.

Lemma 9.1 *Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$. Dann sind die Trajektorien von (9.1) in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, außer dem Gleichgewichtspunkt, geschlossene Kurven. Die dazugehörigen Lösungen sind periodisch.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Sei $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Dann hat man

$$\left(\frac{\gamma}{x(t)} - \delta \right) x'(t) = \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)} = \left(\frac{-\alpha}{y(t)} + \beta \right) y'(t)$$

und es folgt, dass es eine Konstante gibt derart, dass

$$\gamma \ln(x(t)) - \delta x(t) = -\alpha \ln(y(t)) + \beta y(t) + c.$$

Anders gesagt, die Trajektorien $\{(x(t), y(t)); t \in (t_-, t_+)\}$ sind Niveaumengen der Funktion

$$F(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y).$$

Diese Niveaumengen sind konvexe beschränkte Kurven, weil $x \mapsto F(x, y)$ und $y \mapsto F(x, y)$ konvex sind und weil $F(x, y) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, $x \downarrow 0$, $y \rightarrow \infty$, und für $y \downarrow 0$. Dann bleiben nur geschlossene Kurven übrig. Da kein Gleichgewichtspunkt (als Grenzwert) auf so einer Kurve liegt, ist die Lösung sogar periodisch. ■

Lemma 9.2 *Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$. Für die Durchschnittswerte einer Lösung von (9.1) in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt:*

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ und } \bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Beweis. Sei T die Periode einer Lösung. Der Durchschnittswert ist definiert durch

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Wenn wir die zweite Differentialgleichung benutzen, finden wir

$$x(t) = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{y'(t)}{\delta y(t)}$$

und es folgt

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\gamma}{\delta} - \frac{y'(t)}{\delta y(t)} \right) dt = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{T\delta} (\ln(y(T)) - \ln(y(0))) = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Ähnlich folgt das Ergebnis für \bar{y} . ■

Wenn es keine Räuber gibt, wächst die Größe der Beute exponentiell zu ∞ . Ein derartiges Modell ist nicht besonders glaubwürdig. Um diesem unnatürlichen Verhalten vorzuzukommen, wird dieses Räuber-Beute Modell wie folgt geändert:

$$\begin{cases} x'(t) = (-\alpha - c_1 x(t) + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - c_2 y(t) - \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Auch c_1 und c_2 sind positiv.

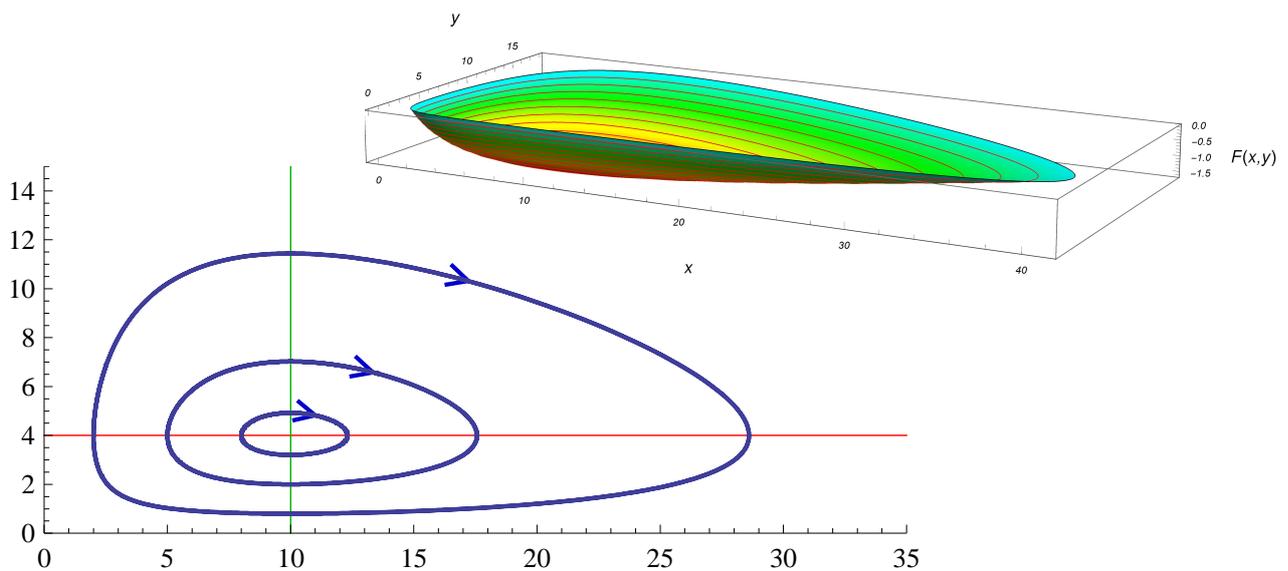


Abbildung 9.1: Für f aus Beispiel 9.3 oben eine Skizze zu $(x, y) \mapsto f(x, y)$ mit einige Niveaulinien. Im unteren Bild die Skizze einiger Trajektorien für 9.2. Trajektorien laufen über Niveaulinien.

Beispiel 9.3 Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = \left(-1 + \frac{1}{4}y(t)\right) x(t), \\ y'(t) = \left(1 - \frac{1}{10}x(t)\right) y(t). \end{cases} \quad (9.2)$$

Die Gleichgewichtspunkte sind $(0, 0)$ und $(10, 4)$. Linearisieren um $(10, 4)$ liefert die neutral stabile Linearisierung

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Dies liefert jedoch nicht unbedingt die Stabilität rund $(10, 4)$ für (9.2). Dazu betrachten wir $f(x, y) = -\ln(y) + \frac{1}{4}y - \ln(x) + \frac{1}{10}x$. Man berechnet direkt, dass für eine Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= \left(-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{10}\right) x'(t) + \left(-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{4}\right) y'(t) = 0. \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung verwendet man (9.2). So folgt, dass für eine Lösung gilt

$$f(x(t), y(t)) = f(x(0), y(0)).$$

Die Lösungskurven sind Niveaumengen von f . Siehe Abbildung 9.1 auf Seite 95.

9.1.2 Das kooperative Modell oder Mutualismus

Man betrachtet zwei Spezies x und y , die gegenseitig von ihrer Anwesenheit profitieren:

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma + \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Ist man auch hier besorgt über die Überbevölkerung, kann man das System wiederum ändern in

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha + \beta y(t) - c_1 x(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma + \delta x(t) - c_2 y(t)) y(t). \end{cases}$$

Nicht jedes Paar positiver Konstanten c_1, c_2 sorgt für beschränkte Lösungen.

9.1.3 Das Wettbewerbsmodell

Zwei verschiedene Arten, die beide um die gleichen Ressourcen kämpfen müssen, werden modelliert durch

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha - c_1 x(t) - \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - c_2 y(t) - \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Es hängt von den Konstanten ab, ob beide Populationen gleichzeitig überleben können.

Beispiel 9.4 Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - 2x(t) - y(t)) x(t), \\ y'(t) = (2 - x(t) - 2y(t)) y(t). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind $(0, 0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Man findet

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 4x - y & -x \\ -y & 2 - x - 4y \end{pmatrix}$$

und:

Ggp.:	$(0, 0)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(1, 0)$	$(0, 1)$
Matrix:	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
Eigenwerte:	2, 2	$-\frac{2}{3}, -2$	-2, 1	-2, 1
Stabilität:	instabil	as. stabil	instabil	instabil

Man kann zeigen, dass die Lösung mit $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ zu $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ konvergiert für $t \rightarrow \infty$. Die beiden Spezien können nebeneinander existieren.

Beispiel 9.5 Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - x(t) - 2y(t)) x(t), \\ y'(t) = (2 - 2x(t) - y(t)) y(t). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind $(0, 0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(2, 0)$ und $(0, 2)$. Man findet

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2x - 2y & -2x \\ -2y & 2 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

und:

Ggp.:	$(0, 0)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(2, 0)$	$(0, 2)$
Matrix:	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
Eigenwerte:	2, 2	$\frac{2}{3}, -2$	-2, -2	-2, -2
Stabilität:	instabil	instabil	as. stabil	as. stabil

Man kann zeigen, dass die Lösung mit $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ und $x(0) > y(0)$ zu $(2, 0)$ konvergiert für $t \rightarrow \infty$. Wenn $x(0) < y(0)$ folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 2)$.

Beide Arten können nicht nebeneinander überleben.

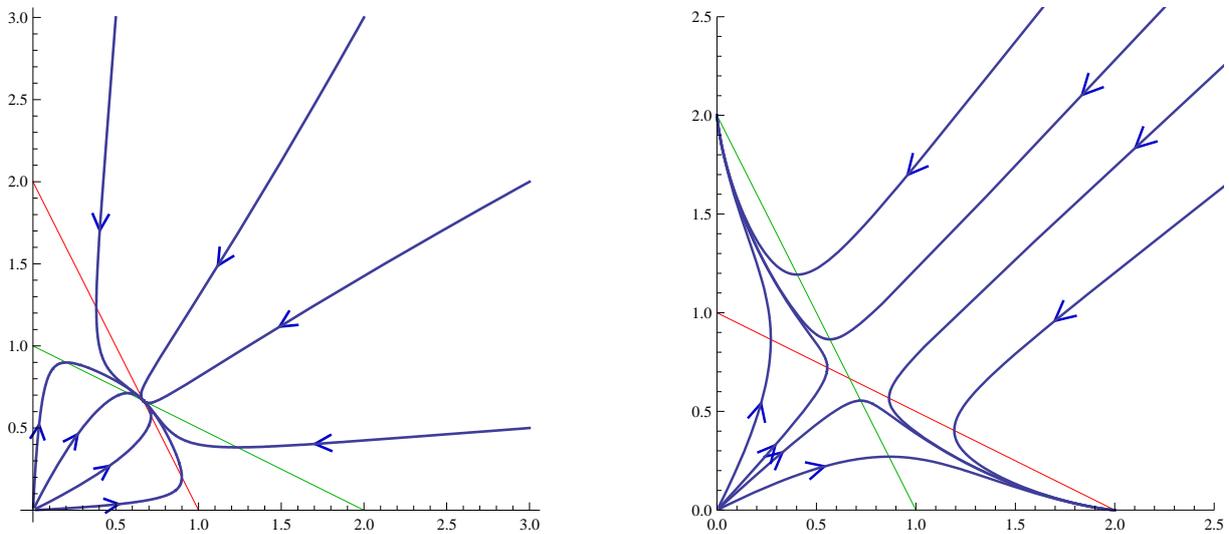


Abbildung 9.2: Skizze einiger Trajektorien aus den letzten Beispielen.

9.2 Lyapunov

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Wir betrachten wiederum für eine C^1 -Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ das System

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (9.3)$$

und nehmen an $x_p \in \Omega$ ist ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 9.6 Sei U eine Umgebung von x_p . Die C^1 -Funktion $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Lyapunov-Funktion für (9.3) beim Gleichgewichtspunkt x_p , wenn

1. $V(x_p) = 0$;
2. $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{x_p\}$;
3. $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ für $x \in U$.

Bemerkung 9.6.1 Die Notation \dot{V} ist eigentlich eigenartig, denn in ihr steckt das Vektorfeld f . Der Punkt steht für die Richtungsableitung von V in der Richtung des Vektorfeldes f und so wäre $\frac{\partial V}{\partial f}$ also eine bessere Notation. Diese wird jedoch nicht verwendet.

Theorem 9.7 Sei x_p ein Gleichgewichtspunkt für (9.3) und sei V eine Lyapunov-Funktion für (9.3) bei x_p .

- Dann ist x_p ein stabiler Gleichgewichtspunkt.
- Wenn $\dot{V}(x) < 0$ für $x \in U \setminus \{x_p\}$, dann ist x_p sogar asymptotisch stabil.

Beweis. Sei $t \mapsto x(t)$ für $t \in [0, t_+)$ eine Lösung von (9.3) mit t_+ maximal. Wenn $\dot{V}(x) \leq 0$ für $x \in U$, dann gilt für $t \in [0, t_+)$, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq 0$$

und für $t \in [0, t_+)$ gilt

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} V(x(s)) \, ds \leq 0.$$

Außerdem gilt $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \rightarrow t_+} u(t) \in \partial U$ oder $\lim_{t \rightarrow t_+} |u(t)| = \infty$.

1) Die Stabilität. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft:

Wenn $x(0) \in B_\delta(x_p)$, dann folgt $x(t) \in B_\varepsilon(x_p)$ für alle $t > 0$.

Sei K eine kompakte Menge in U mit $x_p \in K \subset U^\circ$. Wir dürfen annehmen, dass ε genügend klein ist, so dass $B_{2\varepsilon}(x_p) \subset K$. Definiere

$$c_\varepsilon = \inf \{V(x); x \in K \setminus B_\varepsilon(x_p)\}.$$

Weil $K \setminus B_\delta(x_p)$ kompakt ist, und weil $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{x_p\}$ folgt $c_\varepsilon > 0$. Weil V stetig ist und $V(x_p) = 0$, gibt es $\delta > 0$ derart, dass $V(x) < c_\varepsilon$ für $x \in B_\delta(x_p)$. Nehmen wir $x(0) \in B_\delta(x_p)$, dann folgt aus $V(x(t)) \leq V(x(0)) < c_\varepsilon$, dass $x(t) \in B_\varepsilon(x_p)$ für $t \in [0, t_+)$, also auch, dass $t_+ = \infty$.

2) Die asymptotische Stabilität. Wegen des ersten Teils des Beweises wissen wir schon, dass x_p ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist. Auch wissen wir, dass $t \mapsto V(x(t))$ eine fallende Funktion ist, die nach unten durch 0 beschränkt ist. Dann existiert $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$. Wenn $\ell > 0$, dann gilt $V(x(t)) \geq \ell$ für alle $t > 0$. Wegen der Stetigkeit von V gibt es $\delta > 0$ derart, dass für $|x - x_p| < \delta$ folgt $V(x) < \ell$. So haben wir gefunden, dass $|x(t) - x_p| \geq \delta$ für alle $t \in [0, \infty)$. Weil $V \in C^1$ und f stetig ist, ist \dot{V} stetig und mit der Kompaktheit von $K \setminus B_\delta(x_p)$ folgt

$$d_\delta = \sup \left\{ \dot{V}(x); x \in K \setminus B_\delta(x_p) \right\} < 0$$

und so auch

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} V(x(s)) \, ds \leq d_\delta t \rightarrow -\infty \text{ für } t \rightarrow \infty,$$

ein Widerspruch. ■

Bemerkung 9.7.1 Betrachte

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (9.4)$$

für $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $x_p \in \Omega$ ein Gleichgewichtspunkt. Sei $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von x_p und sei $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion mit $\dot{V}(x) < 0$ für alle $x \in U \setminus \{x_p\}$. Definieren wir für $c \in \mathbb{R}^+$ die Umgebung U_c von x_p durch

$$U_c = \{x; V(x) < c\}$$

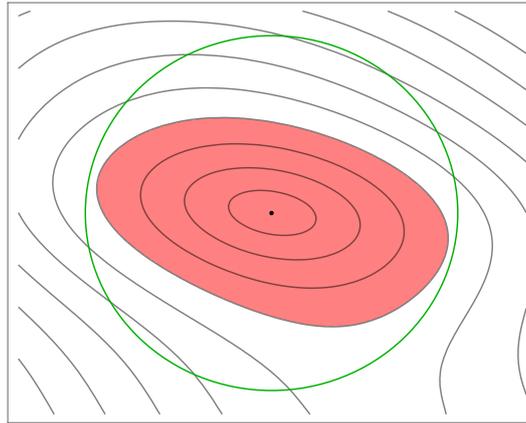


Abbildung 9.3: Seien f , U und V als in Bemerkung 9.7.1. Die schwarzen Kurven stellen die Niveaulinien der Lyapunov-Funktion V vor mit dem Punkt x_p im Zentrum. Die Umgebung U hat den grünen Kreis als Rand. Liegt x_0 im rosa Gebiet, dann existiert $x(t)$ für $t \in [0, \infty)$ und gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p$.

und $\overline{U_c} \subset U$, dann folgt für jedes $x_0 \in U_c$, dass für die Lösung von (9.4) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p.$$

Siehe Abbildung 9.3. Dieses Ergebnis findet man, wenn man sich den Beweis von Theorem 9.7 sorgfältig anschaut.

Beispiel 9.8 Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t)^3 + x(t)y(t)^2 \\ -y(t)^3 - x(t)^2y(t) \end{pmatrix}.$$

Für Gleichgewichtspunkte gilt $-x^3 + xy^2 = 0$ und $-y^3 - x^2y = 0$. Das führt via $x(y-x)(y+x) = 0$ und $y(x^2 + y^2) = 0$ zu $(0, 0)$. Die Linearisierung gibt keine Auskünfte bezüglich Stabilität oder Instabilität. Wir versuchen die Standard-Lyapunov-Funktion:

$$V(x, y) = |(x, y) - (0, 0)|^2.$$

Man sieht sofort, dass $V(0, 0) = 0$ und $V(x, y) > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Es gilt weiter, dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^3 + xy^2 \\ -y^3 - x^2y \end{pmatrix} = -2x^4 + 2x^2y^2 - 2y^4 - 2x^2y^2 = \\ &= -2x^4 - 2y^4 < 0 \text{ für } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Also ist $(0, 0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

Weil dieses Argument sogar global ist, finden wir, dass jede Lösung zum Gleichgewichtspunkt konvergiert für $t \rightarrow \infty$.

Man kann sogar die „Konvergenzgeschwindigkeit“ abschätzen. Weil

$$2x^4 + 2y^4 \geq x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

gilt, finden wir $\dot{V}(x, y) \leq -V(x, y)^2$. Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t), y(t)) \leq -V(x(t), y(t))^2$$

und via

$$\frac{-1}{V(x(t), y(t))} - \frac{-1}{V(x(0), y(0))} = \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} V(x(s), y(s))}{V(x(s), y(s))^2} ds \leq \int_0^t -1 ds = -t$$

finden wir

$$\frac{1}{V(x(t), y(t))} \geq \frac{1}{V(x(0), y(0))} + t$$

und

$$x(t)^2 + y(t)^2 = V(x(t), y(t)) \leq \frac{1}{\frac{1}{V(x(0), y(0))} + t} < \frac{1}{t}.$$

Diese letzte Abschätzung gilt für jeden Anfangswert!

Definition 9.9 Wenn jede Lösung von $x'(t) = f(x(t))$ zum Gleichgewichtspunkt x_p konvergiert für $t \rightarrow \infty$, dann nennt man x_p global asymptotisch stabil.

Beispiel 9.10 Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{2}v - \sin(u) \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Die Gleichgewichtspunkte sind $(k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und wenn man da linearisiert, findet man

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Für k gerade folgt $\lambda = -\frac{1}{4} \pm i\frac{1}{4}\sqrt{15}$ und für k ungerade $\lambda = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17}$. Nur für gerade k hat man also stabile Gleichgewichtspunkte. Dies zeigt aber noch nicht, wie groß das Einzugsgebiet bei so einem Gleichgewichtspunkt ist. Betrachten wir die Funktion

$$V(u, v) = 1 - \cos(u) + \frac{1}{2}v^2.$$

Sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $V(u, v) > 0$ für alle $(u, v) \neq (2m\pi, 0)$ und $V(2m\pi, 0) = 0$. Weiter finden wir, dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \nabla V(u, v) \cdot F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(u) \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{2}v - \sin(u) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}v^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Schaut man sich die Niveaumengen von V an, dann sieht man, dass alle Kurven mit Anfangswerten in

$$D_m = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } |x - 2m\pi| < \pi \text{ und } |y| \leq 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \right\}$$

für $t \rightarrow \infty$ nach $(2m\pi, 0)$ konvergieren. Auf D_m ist V eine Lyapunov-Funktion für (9.5) beim Gleichgewichtspunkt $(2m\pi, 0)$. In Abbildung 9.4 sind die D_m in grün dargestellt.

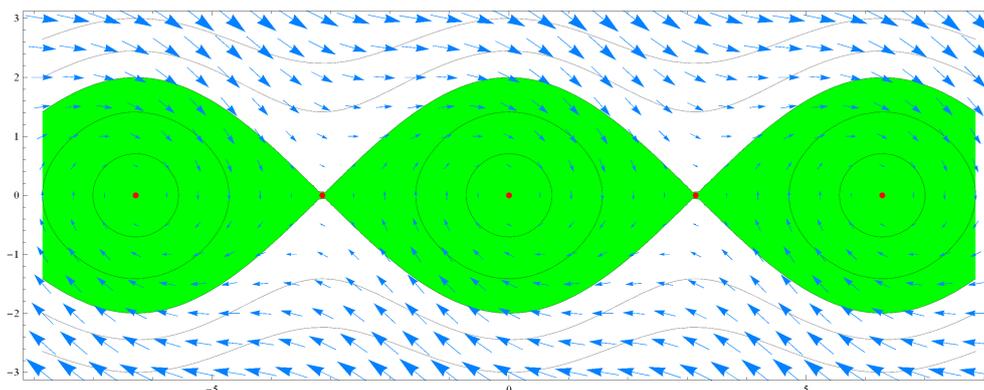


Abbildung 9.4: Die Kurven sind Niveaumengen von V ; in grün Einzugsgebiete für die stabilen Gleichgewichtspunkte. Die Vektoren gehören zum Vectorfeld F .

9.3 Systeme in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

Für autonome Differentialgleichungssysteme $x'(t) = f(x(t))$ in \mathbb{R}^2 mit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ haben wir die folgenden Lösungstypen gesehen.

- Lösungen, die nach ∞ abhauen. Genauer gesagt $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{t \uparrow t_+} |x(t)| = \infty$. Es ist dabei möglich, dass $t_+ = \infty$.
- Konstante Lösungen. Das heißt $x(t) = x_p$ für $t \in \mathbb{R}$ mit x_p einem Gleichgewichtspunkt.
- Lösungen, die nach einem Gleichgewichtspunkt konvergieren, also $x : (t_-, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p$.
- Periodische Lösungen: $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x(t+T) = x(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.
- Auch gibt es möglicherweise Lösungen, die zu einer periodischen Lösung konvergieren.

Ähnliches Verhalten kann man für $t \downarrow t_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ unterscheiden. Mehr Typen gibt es nicht in \mathbb{R}^2 . In einer Vorlesung „Dynamische Systeme“ wird man mehr erfahren.

Beispiel 9.11 Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - x(t)^2 - y(t)^2)x(t) - y(t) \\ (1 - x(t)^2 - y(t)^2)y(t) + x(t) \end{pmatrix}.$$

Als einzigen Gleichgewichtspunkt finden wir $(x, y) = (0, 0)$. Das zugehörige linearisierte System ist

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

und ergibt einen instabilen Strudel.

Mit Hilfe von einer Substitution kann man die Lösungen des ursprünglichen Systems explizit berechnen. Für $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ findet man die Differentialgleichung

$$r'(t) = 2(x(t)^2 + y(t)^2)^{-1/2} (x(t)x'(t) + y(t)y'(t)) = 2(1 - r(t)^2)r(t)$$

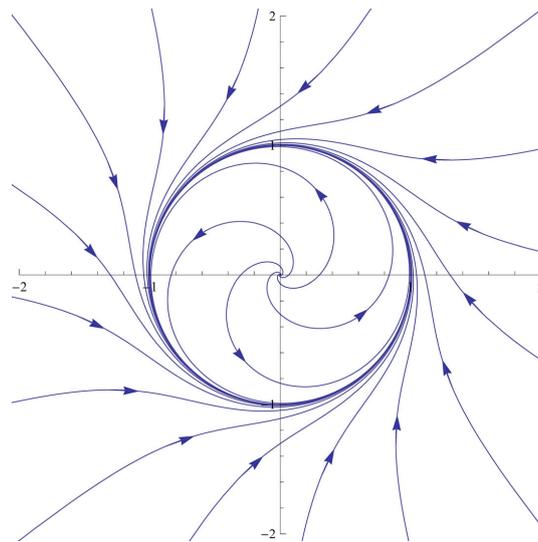


Abbildung 9.5: Skizze einiger Trajektorien aus Beispiel 9.11.

und die lässt sich explizit lösen: $r(t) = (1 + c_1 e^{-2t})^{-1/2}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$. Mit Polarkoordinaten,

$$x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t) \sin(\varphi(t))$$

folgt

$$\begin{aligned} x'(t) &= r'(t) \cos(\varphi(t)) - r(t) \sin(\varphi(t)) \varphi'(t), \\ y'(t) &= r'(t) \sin(\varphi(t)) + r(t) \cos(\varphi(t)) \varphi'(t). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Die Differentialgleichung liefert

$$y(t) x'(t) - x(t) y'(t) = -y(t)^2 - x(t)^2 = -r(t)^2;$$

die Gleichungen in (9.6) liefern

$$y(t) x'(t) - x(t) y'(t) = -r(t)^2 \varphi'(t).$$

Es folgt, dass $\varphi'(t) = 1$ und $\varphi(t) = t + c_2$.

Anfang der sechziger Jahre hat Edward Lorenz für eine Überraschung gesorgt, als er ein Beispiel eines Differentialgleichungssystems in \mathbb{R}^3 brachte mit einem wesentlich anderen Verhalten. Das nach ihm benannte System ist wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}.$$

Die Konstanten a, b, c wählt man in \mathbb{R}^+ . Dieses System kam auf, als er ein Modell für Strömungen in der Erdatmosphäre vereinfachte.

Für $c \leq 1$ gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt, nämlich $(0, 0, 0)$ und dieser ist asymptotisch stabil. Es gilt

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser letzten Matrix sind

$$-b \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}(a+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 - 4(1-c)}. \quad (9.7)$$

Sie sind negativ für $c < 1$.

Für $c > 1$ sind die Gleichgewichtspunkte (mit $d = \sqrt{b(c-1)}$) wie folgt:

Ggp:	$(0, 0, 0)$	$(d, d, c - 1)$	$(-d, -d, c - 1)$
Matrix:	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -d \\ d & d & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -d \\ -d & -d & -b \end{pmatrix}$
Eigenw. ² :	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_3$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3}?$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3}?$
	instabil	a, b, c -bedingt	instabil

Für $a = 3$, $b = 1$ und $c = 25$ findet man eine Skizze einer Lösung in Abbildung 9.6. Die Tabelle wird

Ggp:	$(0, 0, 0)$	$(\sqrt{24}, \sqrt{24}, 24)$	$(-\sqrt{24}, -\sqrt{24}, 24)$
Eigenw.:	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_3$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \nu \pm i\mu$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \nu \pm i\mu$
	instabil	$\nu > 0 \Rightarrow$ instabil	instabil, $\nu < 0$

Die Lösung ist beschränkt aber konvergiert weder zu einem Gleichgewichtspunkt noch zu einer periodischen Lösung. Ein System mit derartigen Lösungen nennt man chaotisch.

²Die Eigenwerte der ersten Matrix sind wie in (9.7). Einer ist jetzt positiv. Die Eigenwerte der zweiten Matrix sind Nullstellen von $2ad^3/b + (b + ab + d^3/b)x + (1 + a + b)x^2 + x^3$. Die Eigenwerte der dritten Matrix sind Nullstellen von $-2ad^3/b + (b + ab - d^3/b)x + (1 + a + b)x^2 + x^3$. Der Zwischenwertsatz liefert für diese Polynome mindestens eine negative, beziehungsweise positive Nullstelle.

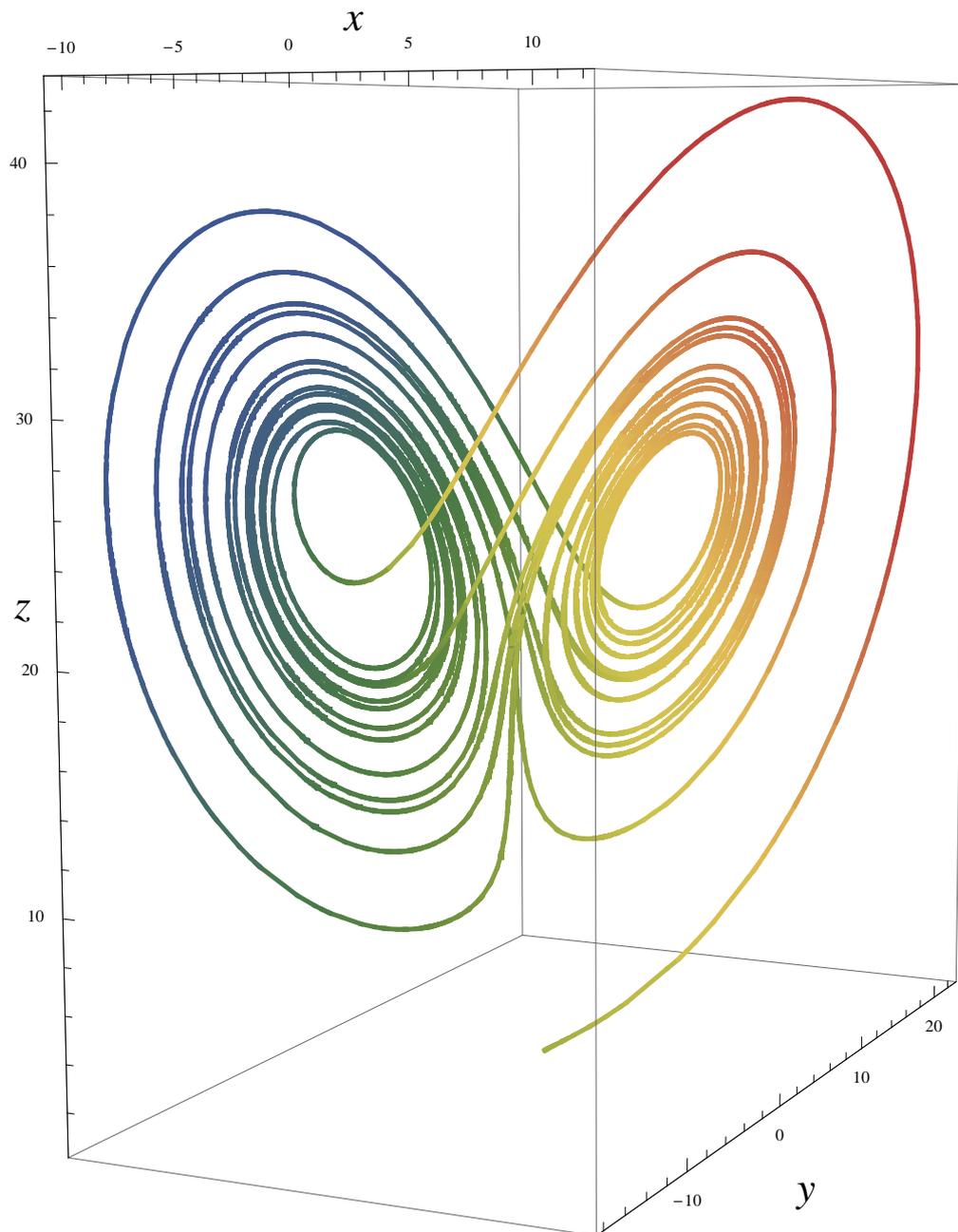


Abbildung 9.6: *Eine Lösung mit wirrem Verhalten*

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 10

Spezielles für zweite Ordnung



10.1 Phasenebene

Wenn wir die autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) = f(u(t), u'(t)) \quad (10.1)$$

studieren wollen, ist ein möglicher Ansatz, diese Gleichung als System zu betrachten:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = f(u(t), v(t)). \end{cases} \quad (10.2)$$

Wenn $(u, v) \mapsto (v, f(u, v))$ lokal die Lipschitz-Bedingung erfüllt, und sie ist erfüllt, wenn f differenzierbar ist, dann hat das Anfangswertproblem für (10.2) genau eine Lösung. Dieses Ergebnis kann man auch für (10.1) anwenden.

Lemma 10.1 *Nehmen wir an, dass für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Konstante $L_\Omega \in \mathbb{R}^+$ existiert so, dass*

$$|f(u, v) - f(\bar{u}, \bar{v})| \leq L_\Omega (|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|) \text{ für alle } (u, v), (\bar{u}, \bar{v}) \in \Omega. \quad (10.3)$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u''(t) = f(u(t), u'(t)), \\ u(a) = u_0, \\ u'(a) = v_0, \end{cases} \quad (10.4)$$

für jeden Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung $u \in C^2(t_-, t_+)$ mit $t_- < a < t_+$ und (t_-, t_+) ist das maximale Existenzintervall.

Beweis. Man zeigt direkt, dass (10.3) gleichwertig ist zu einer lokalen Lipschitzbedingung für $(u, v) \mapsto (v, f(u, v))$. Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz liefert uns eine eindeutige Lösung für (10.2) mit maximalem Existenzintervall (t_-, t_+) . Für diese Lösung $t \mapsto (u(t), v(t))$ gilt $u, v \in C^1(t_-, t_+)$ und weil $u' = v \in C^1(t_-, t_+)$ folgt $u \in C^2(t_-, t_+)$. ■

Die Menge der Trajektorien zu (10.2) nennt man auch die Phasenebene für (10.1).

Beispiel 10.2 Wie wir später noch genauer sehen werden, gehört zu einem Pendel, mit Reibung proportional zur Geschwindigkeit, die folgende Differentialgleichung:

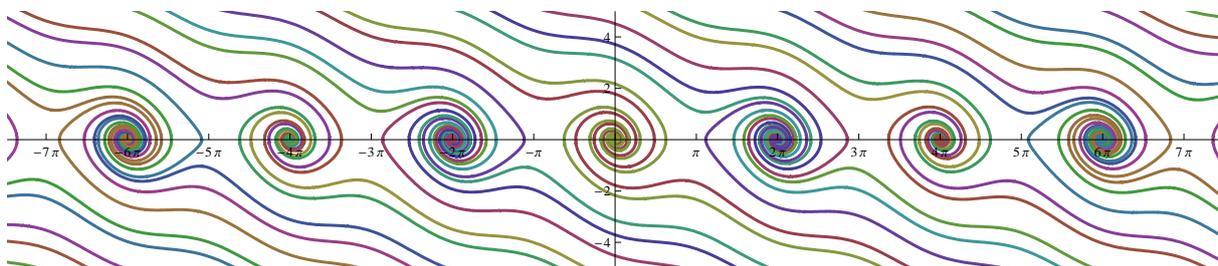
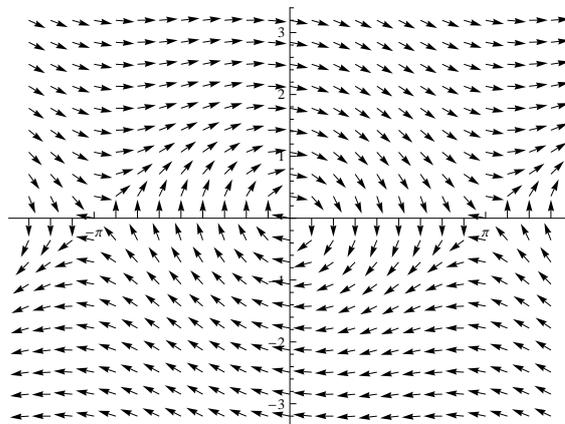
$$\theta''(t) = -c_1 \sin \theta(t) - c_2 \theta'(t).$$

Wir nehmen $c_1 = 1$ und $c_2 = \frac{1}{3}$.

Vernünftige explizite Formeln für die Lösungen gibt es nicht. Man kann das Vektorfeld für das zugehörige System

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ -c_1 \sin \theta(t) - c_2 \psi(t) \end{pmatrix}$$

skizzieren und Trajektorien darstellen, wenn man Kurven durch die Vektoren zieht. Auch numerische Approximationen lassen sich herstellen und als Trajektorien darstellen:



10.2 Differentialgleichung für Trajektorien

Wenn eine Trajektorie $\{(u(t), u'(t)); t \in (t_-, t_+)\}$ für die Differentialgleichung in (10.1) lokal der Graph einer Funktion ist, hat man diese letzte Funktion als Lösung einer neuen Differentialgleichung. Man setze

$$V(u(t)) = u'(t) \quad (10.5)$$

und finde

$$f(u(t), u'(t)) = u''(t) = \frac{\partial}{\partial t} V(u(t)) = V'(u(t)) u'(t).$$

Setzen wir nochmals (10.5) ein und betrachten wir nun $u \mapsto V(u)$, dann folgt

$$f(u, V(u)) = V'(u) V(u).$$

Das heißt, die Funktion V ist eine Lösung von

$$V'(u) = \frac{f(u, V(u))}{V(u)}. \quad (10.6)$$

Dies gibt uns eine alternative Möglichkeit, die Gleichung in (10.1) als System zu schreiben:

$$(1) \quad u''(t) = f(u(t), u'(t))$$

$$(2) \quad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(u(t), u'(t)) \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} V'(u) = \frac{f(u, V(u))}{V(u)} \\ u'(t) = V(u(t)) \end{cases} \quad (10.7)$$

Der Vorteil von (3) ist, dass dieses System zwei Gleichungen erster Ordnung hat, die man nacheinander lösen kann. Der Nachteil ist, dass $V \neq 0$ gelten soll.

Wenn man eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung hat, die keine erste Ordnungstermen enthält, also

$$u''(t) = f(u) \quad (10.8)$$

dann ist diese Aufspaltung sehr nützlich. Die Differentialgleichung in (10.6) vereinfacht sich zu

$$V'(u) = \frac{f(u)}{V(u)}$$

und diese lässt sich oft explizit lösen. Via $V'(u)V(u) = f(u)$ findet man

$$\frac{1}{2}V(u)^2 - \frac{1}{2}V(u_0)^2 = \int_{u_0}^u f(s)ds.$$

Bemerkung 10.2.1 Die Gleichung (10.8) kann man auch direkt mit $u'(t)$ multiplizieren

$$u''(t)u'(t) = f(u)u'(t).$$

Kennt man eine Stammfunktion F von f so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}u'(t)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} F(u(t))$$

und die Abhängigkeit von $u(t)$ und $u'(t)$ wird:

$$\frac{1}{2}u'(t)^2 = F(u(t)) + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $u'(t) = V(u(t))$ für

$$V(u) = \pm \sqrt{2F(u) + 2C} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

10.3 Feder und Pendel

Einfache Modelle für eine Feder oder ein Pendel haben die Form (10.8). Aus der Physik kennt man:

- Das zweite Newtonsche Gesetz:
Kraft gleicht Masse mal Beschleunigung: $F_N = m a$.
- Bei einer perfekten Schraubenfeder nimmt man das Hookesche¹ Gesetz:
Kraft ist proportional zur Auslenkung: $F_H = c u$.
- Das dritte Newtonsche Gesetz:
Actio est reactio: $F_N + F_H = 0$.

Weil für die Beschleunigung a gilt, dass $a = u''$, folgt

$$u'' = -\frac{c}{m}u. \quad (10.9)$$

Für eine Blattfeder ist das Hookesche Gesetz nicht passend. Dann hat man statt des Hookeschen Gesetzes $F = f(u)$, wobei f ein Profil hat wie in Abbildung 10.1 und die Differentialgleichung wird

$$u'' = f(u). \quad (10.10)$$

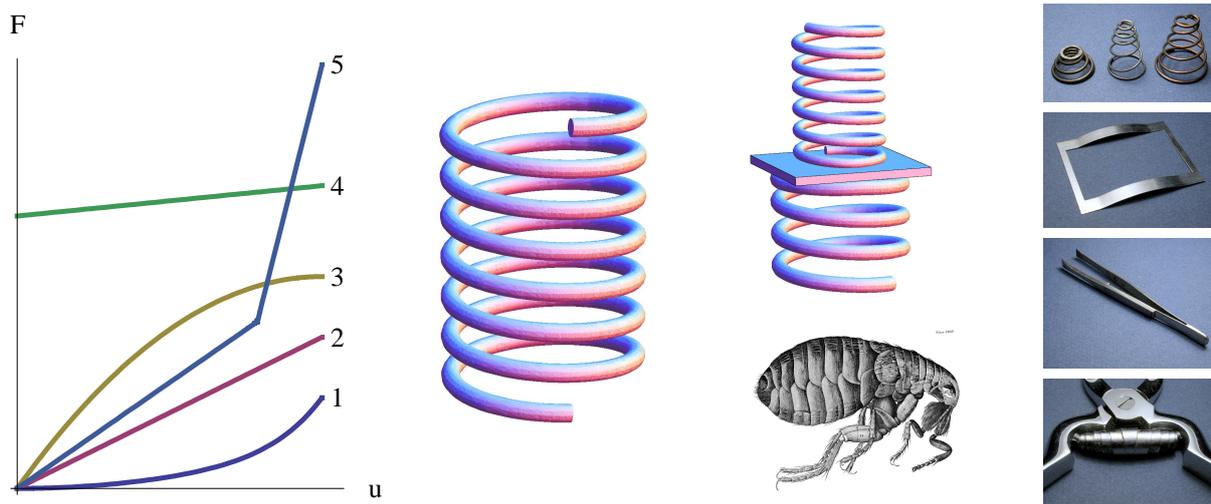
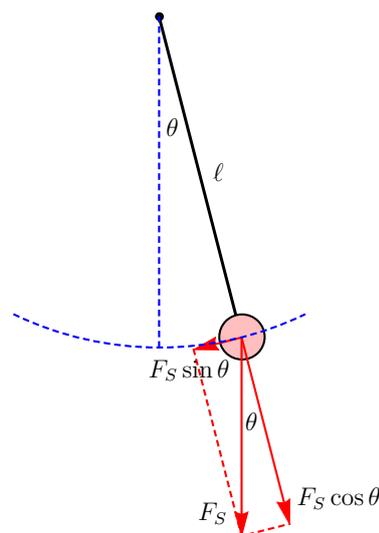


Abbildung 10.1: Aus Wikipedia links einige Federkennlinien als Funktion der Kraft über den Federweg: 1 progressiv Bsp. Kfz-Blattfeder; 2 linear Bsp. Schraubenfeder; 3 degressiv; 4 näherungsweise konstant Bsp. Kupplungsfeder Auto; 5 nicht glatt z.B. durch auf Block setzen einiger Federteile. Rechts einige Beispiele unterschiedlicher Federn. Der Floh ist von Hooke.



Für das Pendel hat man auch die beiden Newtonschen Gesetze. Statt des Hookeschen Gesetzes wird im Modell nun die Schwerkraft $F_S = m g$ eine Rolle spielen. Im Modell beschreibt man die Auslenkung u durch den Winkel θ , also $u(t) = \ell \theta(t)$, und findet mit der Projektion der Schwerkraft auf der tangentialen Richtung $m g \sin \theta$, bei der ℓ die Länge und m die Masse des Pendels ist, dass

$$m \ell \theta''(t) = -m g \sin(\theta(t))$$

und vereinfacht dies zu

$$\theta''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)). \quad (10.11)$$

Auch diese Differentialgleichung hat die Form von (10.10), nämlich $u'' = f(u)$. Schreibt man (10.10) als System wie in (10.7) mit $v(t) = u'(t)$ dann wird es:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ f(u(t)) \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

Lemma 10.3 Sei $f \in C^1$ und $(u_0, 0)$ ein Gleichgewichtspunkt für (10.12). Dann gilt für die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Linearisierung in $(u_0, 0)$, dass $\lambda_1 = -\lambda_2$ und $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ oder $\lambda_1 \in i\mathbb{R}$. Außerdem:

- Wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann ist $(u_0, 0)$ ein Sattelpunkt für (10.12);
- Wenn $\lambda_1, \lambda_2 \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann ist $(u_0, 0)$ neutral stabil für (10.12).

¹Robert Hooke (1635-1703) hatte breite wissenschaftliche Interessen. Er hatte eine Professur für Geometrie, formulierte das nach ihm benannte Fundamentalgesetz der Elastizität, baute eine der ersten Taschenuhren und auch einen optischen Telegrafen. Das Bild des Flohs aus seinem *Micrographia* (1665) ist sogar heutzutage noch bekannt. Siehe <http://www.gutenberg.org/files/15491/>.

Bemerkung 10.3.1 Man bemerke, dass $v_0 = 0$ kein Verlust der Allgemeinheit beinhaltet, denn für einen Gleichgewichtspunkt (u_0, v_0) von (10.12) gilt $v_0 = 0$ und $f(u_0) = 0$.

Bemerkung 10.3.2 Mit einem Sattelpunkt ist gemeint, dass es bei $(u_0, 0)$ eine stabile Richtung und eine instabile Richtung hat im Sinne von Theorem 8.7.

Beweis von Lemma 10.3.. Die Linearisierung ist

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(u_0) & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Eigenwerte gilt $\lambda^2 = f'(u_0)$ und $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Wenn $f'(u_0) > 0$, dann gilt $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{f'(u_0)} \in \mathbb{R}^+$ und wir können Theorem 8.7 anwenden.

Betrachten wir nun den Fall $f'(u_0) < 0$, also $\lambda_1, \lambda_2 \in i\mathbb{R}$. Auch gilt für $f'(u_0) < 0$, dass $u \mapsto F(u) := \int_{u_0}^u f(s) ds$ in u_0 ein lokales Maximum hat, denn $F'(u_0) = f(u_0) = 0$ und $F''(u_0) = f'(u_0) < 0$. Dann ist

$$V(u, v) := \frac{1}{2}v^2 - F(u)$$

eine Lyapunov-Funktion:

- $V(u_0, 0) = 0$;
- Weil $f \in C^1$ folgt $F'' = f' \in C^0$ und es gilt

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u_0) + f(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2}f'(u_0)(u - u_0)^2 + \mathcal{O}(u - u_0)^2 = \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}f'(u_0)(u - u_0)^2 + \mathcal{O}(u - u_0)^2 \leq \frac{1}{4}f'(u_0)(u - u_0)^2 \end{aligned}$$

für $u - u_0$ genügend klein. Dann folgt in einer (kleinen) Umgebung von $(u_0, 0)$, dass $V(u, v) > 0$;

- Auch gilt:

$$\dot{V}(u, v) = \begin{pmatrix} -f(u) \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ f(u) \end{pmatrix} = 0. \quad (10.13)$$

Theorem 9.7 liefert die Stabilität. Die Tatsache, dass der Punkt nur neutral stabil ist, folgt auch aus (10.13), denn für eine Lösung $(u(t), v(t))$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} V(u(t), v(t)) = \dot{V}(u(t), v(t)) = 0.$$

Dies bedeutet $V(u(t), v(t)) = c = V(u(0), v(0))$ und dass für $(u(0), v(0)) \neq (0, 0)$ die Lösung nicht nach $(0, 0)$ konvergiert. ■

Beispiel 10.4 Wie soeben hergeleitet, gehört zu einem Pendel ohne Reibung die Differentialgleichung $\theta''(t) = -c_1 \sin \theta(t)$. Wir nehmen $c_1 = 1$ und betrachten

$$\theta''(t) = -\sin \theta(t).$$

Dies wird wie in (10.7)-(3)

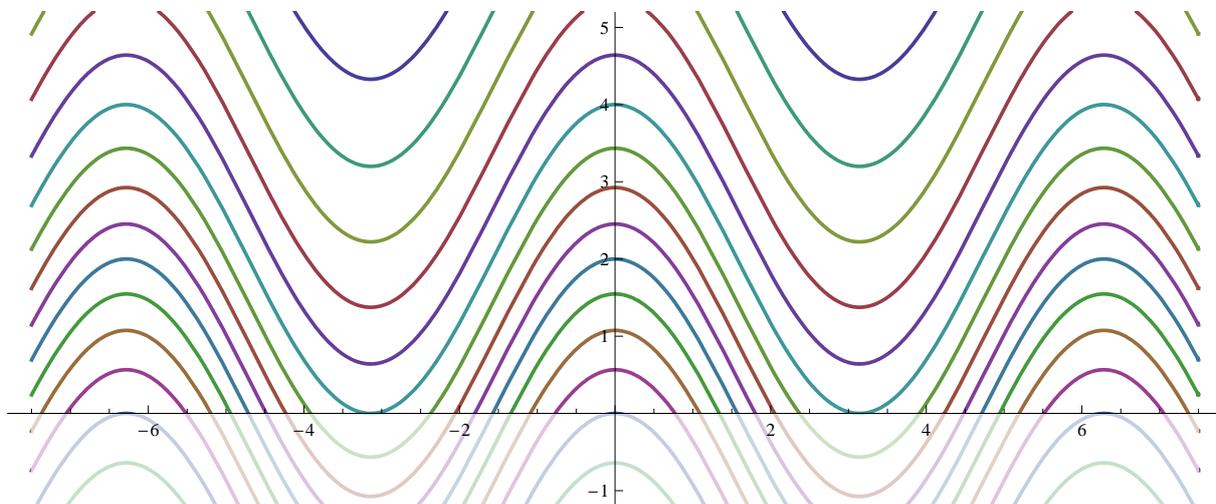
$$V'(\theta) = \frac{-\sin \theta}{V(\theta)}.$$

Man findet via $V'(\theta) V(\theta) = -\sin \theta$ und $\frac{1}{2}V(\theta)^2 = c + \cos \theta$, dass

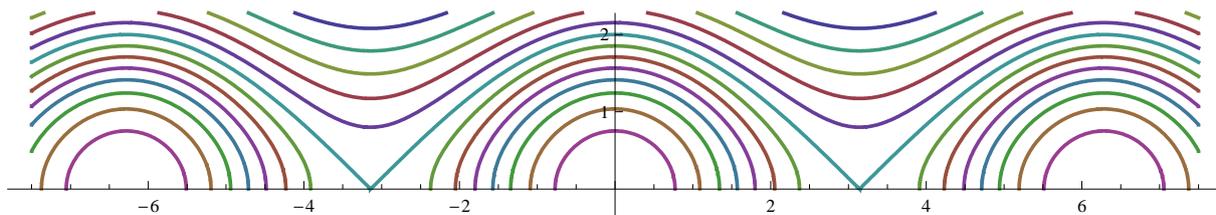
$$V(\theta) = \pm\sqrt{\tilde{c} + 2 \cos \theta}.$$

In drei Schritten zeichnet man einige Trajektorien.

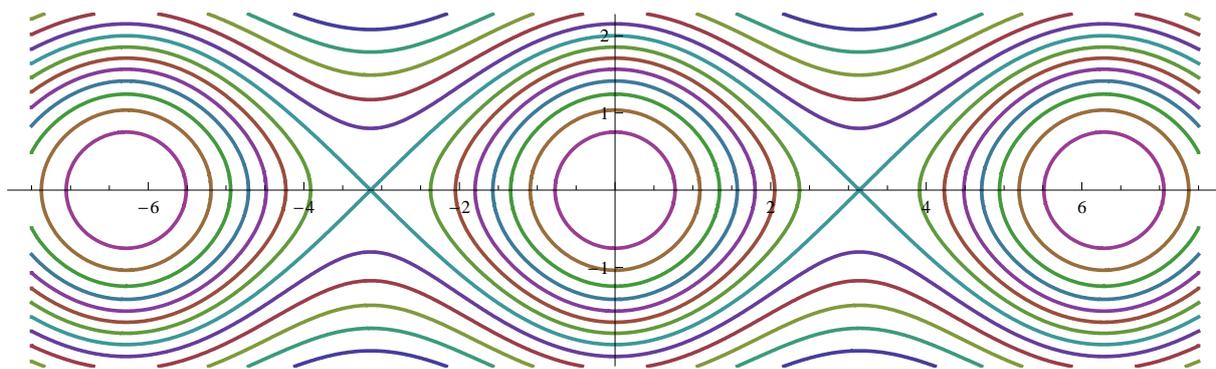
1) Die Funktion $\theta \mapsto 2 \cos \theta$ und einige vertikale Verschiebungen $\theta \mapsto \tilde{c} + 2 \cos \theta$.



2) Man betrachtet nur die Kurven in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und nimmt die Wurzeln: $\theta \mapsto \sqrt{\tilde{c} + 2 \cos \theta}$.



3) Die Trajektorien findet man, wenn man $\pm\sqrt{\tilde{c} + 2 \cos \theta}$ kombiniert.



10.3.1 Reibung

Reibungskräfte sind abhängig von der Geschwindigkeit und gegengesetzt zur Geschwindigkeit. Wenn u die Auslenkung darstellt ist u' die Geschwindigkeit und es ändert sich die Differentialgleichung in (10.10) in

$$u'' = f(u) - g(u').$$

Hier ist g eine Funktion, die folgende Bedingung erfüllt:

$$g(s) > 0 \text{ für } s > 0 \text{ und } g(s) < 0 \text{ für } s < 0.$$

Wenn g stetig ist, folgt $g(0) = 0$. Wenn dann $f(u^*) = 0$ gilt, ist $(u^*, 0)$ ein Gleichgewichtspunkt für

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ f(u(t)) - g(u'(t)) \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Wenn g auch noch differenzierbar ist, dann kann man bei $(u^*, 0)$ linearisieren und findet als linearisiertes System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(u^*) & -g'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (10.15)$$

Wir betrachten den Fall, dass $f'(u^*) < 0$ ist. Wenn die Reibung bei 0 im Verhältnis klein ist, die genaue Bedingung ist $\frac{1}{4}g'(0)^2 < -f'(u^*)$, dann hat diese Matrix die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}g'(0) \pm i\sqrt{-f'(u^*) - \frac{1}{4}g'(0)^2}.$$

Das bedeutet, dass, wenn $(u^*, 0)$ ein neutral stabiler Gleichgewichtspunkt für (10.12) ist, $(u^*, 0)$ ein exponentiell stabiler Gleichgewichtspunkt für (10.14) ist. Man könnte sagen „Reibung macht stabiler“.

Leider sind Reibungskräfte oft nicht differenzierbar und manchmal sogar nicht mal stetig abhängig von der Geschwindigkeit.

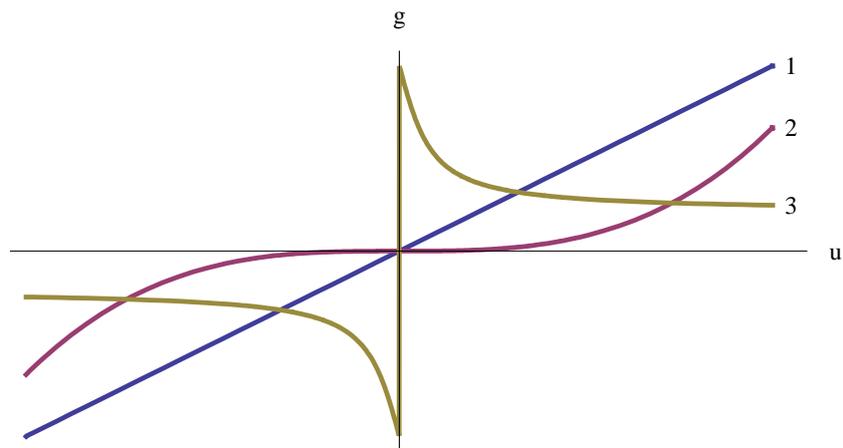
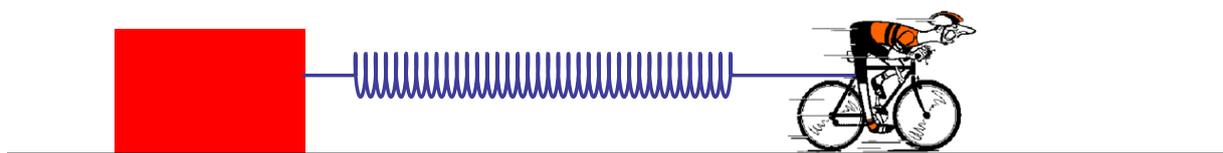


Abbildung 10.2: Reibungskräfte als Funktion der Geschwindigkeit: 1 linear (Coulombsche Reibung); 2 Flüssigkeitsreibung und Gasreibung; 3 Reibung mit Stick-Slip-Effekt.

Beispiel 10.5 Zieht man einen Block ($m = 1$) mit Geschwindigkeit $v = 1$ an einer Schraubfeder (lineare Federkennlinie mit Konstante $c = 1$) aus Stillstand ab, dann wird dies modelliert durch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u''(t) = c(v t - u(t)) - c_w f(u'(t)) \\ u(0) = 0 \text{ und } u'(0) = 0. \end{cases}$$



Nimmt man $c_w = 10$ und setzt man für f Funktionen ein wie in Abbildung 10.2, nämlich

$$f_1(s) = \frac{1}{2}s, \quad f_2(s) = \frac{1}{3}s^3 \quad \text{und} \quad f_3(s) = \text{sign}(s) \frac{2 - \arctan(15|s|)}{4}, \quad (10.16)$$

so findet man mit Hilfe von numerischen Approximationen die Bilder in Abbildung 10.3. Beim dritten Graphen sieht man den Slip-Stick-Effekt. Wo bei den ersten beiden der Block eine monoton wachsende Geschwindigkeit hat, sieht man im dritten, dass die Geschwindigkeit auf und ab geht. Besser gesagt, der Block schießt erst los, wenn genügend gezogen wird, bleibt kurz liegen, schießt wieder los, usw.

Übrigens ist diese Funktion f_3 für $s \neq 0$ nur eine Möglichkeit, wie eine solche Reibung aussehen könnte. Die Haftreibung, also die maximale Reibung bei Stillstand, ist größer als die Reibung, wenn der Block sich bewegt. Das bedeutet auch, dass die Reibungskraft bei Stillstand nicht festliegt, sondern einen Wert zwischen einer positiven oberen Schranke und einer negativen unteren Schranke annimmt. Schaut man das Anfangswertproblem mit f_3 an, dann sieht man, dass es so auch überhaupt keine Lösung gibt. Es kann nur eine Lösung geben, wenn man den Sprung von f_3 bei 0 „auffüllt“. Das heißt, sowohl aus physikalischen als auch aus mathematischen Gründen brauchen wir statt f_3 eine mehrwertige Funktion:

$$\bar{f}_3(s) = \begin{cases} \frac{2 - \arctan(15|s|)}{4} & \text{für } s > 0, \\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \text{für } s = 0, \\ -\frac{2 - \arctan(15|s|)}{4} & \text{für } s < 0. \end{cases}$$

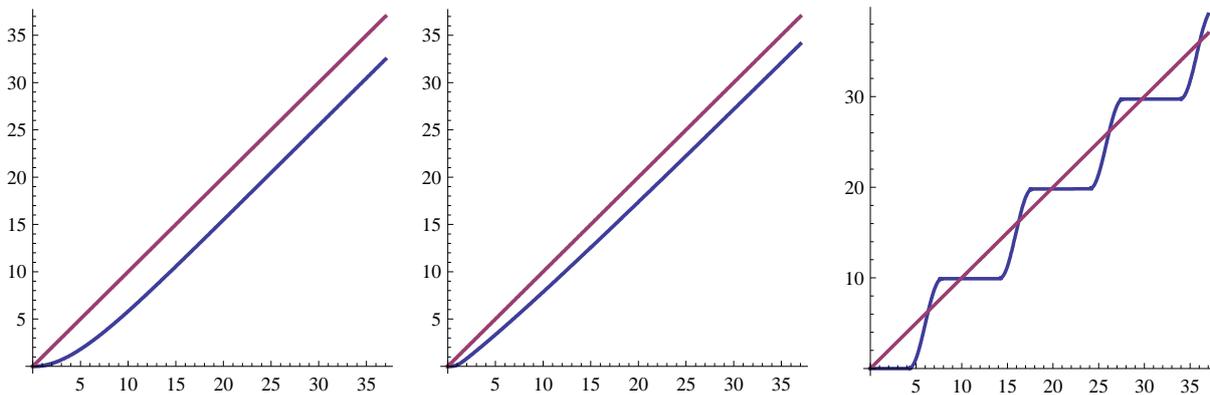
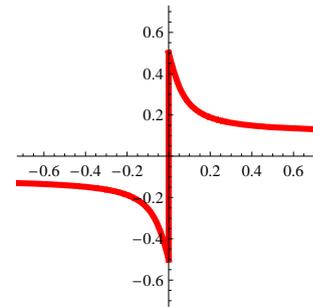


Abbildung 10.3: In rot die Position vt und in blau $u(t)$ bei den verschiedenen f_i , $i = 1, 2, 3$ aus (10.16) und Abbildung 10.2.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 11



Existenz nach Peano

11.1 Gleichmäßig und gleichgradig

Kompaktheit in einem endlich dimensionalen Vektorraum ist äquivalent zu „abgeschlossen und beschränkt“. Weil wir die Kompaktheit auch in unendlich dimensionalen Räumen brauchen werden, geben wir nochmals die zugehörigen Definitionen.

Definition 11.1 • Eine Teilmenge K von $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge bezüglich $\|\cdot\|$ mit Limes in K besitzt.

- Eine Teilmenge K von $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ heißt überdeckungskompakt, wenn für jede Überdeckung von K mit offenen Mengen eine Überdeckung schon durch endlich viele dieser Mengen erreicht wird.

Aus dem Satz von Heine-Borel folgt, dass für normierte Vektorräume folgenkompakt und überdeckungskompakt äquivalent sind und man verwendet die Bezeichnung kompakt.

Definition 11.2 Eine Familie $\mathcal{F} = \{f_\nu\}_{\nu \in I}$ von Funktionen $f_\nu : U \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man gleichgradig¹ stetig in $x \in U$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \forall y \in U, \nu \in I : |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 11.2.1 „ \mathcal{F} ist gleichgradig stetig auf U “ heißt dann:

$$\forall x \in U \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \forall y \in U, \nu \in I : |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

Gleichgradig stetig ist eigentlich selten nützlich, wenn man gleichzeitig nicht auch die gleichmäßige Stetigkeit der einzelnen Funktionen hat. „ \mathcal{F} ist gleichgradig gleichmäßig stetig auf U “ heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in U, \nu \in I : |y - x| < \delta_\varepsilon \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

Man erinnere sich noch an folgendes Ergebnis:

Lemma 11.3 Sei K kompakt und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

¹Gleichgradig stetig heißt auf Englisch *equicontinuous*. Gleichmäßig stetig ist *uniformly continuous*.

Man kann sogar folgendes zeigen.

Lemma 11.4 Sei K kompakt und sei $\{f_\nu : K \rightarrow \mathbb{R}\}_{\nu \in I}$ gleichgradig stetig. Dann ist $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ gleichgradig gleichmäßig stetig.

Beweis. Wenn $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ gleichgradig stetig aber nicht gleichgradig gleichmäßig stetig ist, gibt es $\varepsilon > 0$ und Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in K und $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ und $|f_{\nu_n}(x_n) - f_{\nu_n}(y_n)| \geq \varepsilon$. Weil K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, sagen wir $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x} \in K$. Auch gilt dann $y_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$. Weil $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$ gleichgradig stetig ist in \tilde{x} , gibt es $\delta_{\frac{1}{2}\varepsilon, n} > 0$ derart, dass aus $|x - \tilde{x}| < \delta_{\frac{1}{2}\varepsilon, n}$ folgt $|f_\nu(x) - f_\nu(\tilde{x})| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Nehmen wir n so groß, dass $|x_n - \tilde{x}|, |y_n - \tilde{x}| < \delta_{\frac{1}{2}\varepsilon, n}$ dann hat man wiederum einen Widerspruch:

$$\varepsilon \leq |f_{\nu_n}(x_n) - f_{\nu_n}(y_n)| \leq |f_{\nu_n}(x_n) - f_{\nu_n}(\tilde{x})| + |f_{\nu_n}(\tilde{x}) - f_{\nu_n}(y_n)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

11.2 Der Satz von Arzelà-Ascoli

Theorem 11.5 (Arzelà-Ascoli²)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und sei $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion. Weiter sei angenommen, dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig und beschränkt ist. Dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{f_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, das heißt:

1. $f(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x)$ ist wohldefiniert für $x \in K$,
2. $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f(x) - f_{n_m}(x)| = 0$, und außerdem gilt
3. $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Bemerkung 11.5.1 Die Familie $\{f_n : K \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt bedeutet: es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass $|f_n(x)| \leq M$ gilt für alle $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die einzelnen Schritte des Beweises sind die folgenden:

1. **Existenz einer abzählbaren dichten³ Teilmenge von K .** Die Menge der Kugeln $\mathcal{U}_k := \{B_{2^{-k}}(x); x \in K\}$ ist eine Überdeckung und man kann endlich viele $\{B_{2^{-k}}(x_{k,\ell})\}_{\ell=1}^{\ell_k}$ wählen, die K schon überdecken. Die abzählbare Menge $T := \{x_{k,\ell}; 1 \leq \ell \leq \ell_k, k \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in K .
2. **Konvergenz auf der dichten Teilmenge.** Wir schreiben $T = \{x_k\}_{k=1}^\infty$. Weil die Folge $\{f_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es wegen des Satzes von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_{1,k}}(x_1)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Weil $\{f_{n_{1,k}}(x_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_{2,k}}(x_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$, usw. Also gilt:

$$\begin{aligned} f_{n_{1,1}}, f_{n_{1,2}}, f_{n_{1,3}}, \dots & \text{ konvergiert in } x_1, \\ f_{n_{2,1}}, f_{n_{2,2}}, f_{n_{2,3}}, \dots & \text{ konvergiert in } x_1 \text{ und } x_2, \\ f_{n_{3,1}}, f_{n_{3,2}}, f_{n_{3,3}}, \dots & \text{ konvergiert in } x_1, x_2 \text{ und } x_3, \\ & \text{ usw.} \end{aligned}$$

²Cesare Arzelà (1847-1912) und Giulio Ascoli (1843-1896)

³Eine Teilmenge $T \subset K$ heißt dicht, wenn es zu jedem $x \in K$ eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ gibt, die nach x konvergiert.

Nach m Schritten haben wir eine Teilfolge $\{f_{n_{m,k}}\}_{k=1}^{\infty}$, die konvergiert auf $\{x_1, \dots, x_m\}$. Man setze

$$f_{n_k} = f_{n_{k,k}}.$$

Mit Hilfe dieses sogenannten Diagonalverfahrens bekommt man dann eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, die konvergiert auf T . Wir definieren

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) \text{ für } x \in T. \quad (11.1)$$

3. **Konvergenz auf dem Ganzen K .** Sei $x \in K \setminus T$. Weil T dicht liegt in K , gibt es eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in T$ mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Wir zeigen, dass $\{f(x_n)\}$ eine Cauchy-Folge ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Weil $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta_{\varepsilon/3} > 0$ derart, dass $|x_n - x_k| < \delta_{\varepsilon/3}$ impliziert $|f_n(x_n) - f_n(x_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ unabhängig von n . Weiter nehme man m derart groß, dass $|f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $|f_{n_m}(x_k) - f(x_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Dies ist möglich wegen (11.1).

Sei N so groß, dass $|x_n - x| < \frac{1}{2}\delta_{\varepsilon/2}$ für $n > N$. Dann folgt für $n, k > N$, dass $|x_n - x_k| < \delta_{\varepsilon/3}$ und

$$|f(x_n) - f(x_k)| \leq |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(x_k)| + |f_{n_m}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Cauchy-Folgen sind konvergent, also ist $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass der Limes nicht von der gewählten Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abhängt. Wenn es zwei Folgen $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow x$ gibt, dann gilt auch hier

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(y_n)| + |f_{n_m}(y_n) - f(y_n)|,$$

und man findet ähnlich wie soeben, dass $\{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert hat. Das bedeutet

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ für } T \ni x_n \rightarrow x \in K \setminus T \quad (11.2)$$

ist wohldefiniert.

4. **Stetigkeit der Grenzfunktion.** Auch gilt, dass $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und deshalb auch gleichmäßig stetig ist: Seien $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ derart, dass $T \ni x_n \rightarrow \tilde{x}$ und $T \ni y_n \rightarrow \tilde{y}$. Sei $\varepsilon > 0$. Man verwende:

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| &\leq |f(\tilde{x}) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(y_n)| + \\ &\quad + |f_{n_m}(y_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(\tilde{y})|. \end{aligned}$$

Wenn man n genügend groß nimmt, folgt $|x_n - y_n| < 2|\tilde{x} - \tilde{y}|$. Man nehme $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass $|x - y| < \delta_\varepsilon$ impliziert $|f_{n_m}(x) - f_{n_m}(y)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ und δ_ε ist wegen der gleichgradigen Stetigkeit auf kompaktem K unabhängig von x, y, n_m . Auch nehme man n so groß, dass $|f(\tilde{x}) - f(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ und $|f(y_n) - f(\tilde{y})| < \frac{1}{5}\varepsilon$. Indem man m genügend groß nimmt, findet man $|f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ und $|f_{n_m}(y_n) - f(y_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$. Für $|\tilde{x} - \tilde{y}| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ folgt $|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| < \varepsilon$.

5. **Gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge.** Die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ auf K folgt aus der Kompaktheit von K : Wenn f_{n_m} nicht gleichmäßig konvergiert, dann gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge n_{m_k} mit $x_k \in K$ und

$$|f_{n_{m_k}}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0 \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge, sagen wir $x_{k_\ell} \rightarrow \tilde{x}$. Sei $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ eine Folge mit $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$. Man findet

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f(x_{k_\ell}) \right| \leq \\ &\leq \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) \right| + \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n) \right| + |f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_\ell})|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite bekommt man so klein wie man möchte und damit einen Widerspruch: Für ℓ und n genügend groß folgt, dass $|x_{k_\ell} - \tilde{x}_n|$ genügend klein ist und dann kann man wegen gleichgradiger Stetigkeit $\left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) \right| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$ und $|f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_\ell})| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$ erreichen. Für ℓ genügend groß, hat man schlussendlich auch $\left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n) \right| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$. ■

11.3 Ein vereinfachter Existenzsatz

Für den Satz von Picard-Lindelöf hat man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

umgewandelt in eine Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds.$$

Weil wir nicht annehmen wollen, dass f differenzierbar oder Lipschitz-stetig ist und nur Stetigkeit voraussetzen, wird Konvergenz einer approximierenden Folge von Lösungen etwas komplizierter. Eine Konvergenz wie beim Satz von Picard-Lindelöf zu einer eindeutigen Lösung ist sogar unmöglich, denn es gibt im Allgemeinen keine eindeutige Lösung.

Beispiel 11.6 Das Anfangswertproblem $x'(t) = \sqrt[3]{x(t)}$ mit $x(0) = 0$ hat mindestens drei Lösungen, nämlich für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0, \\ x(t) &= \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}, \\ x(t) &= -\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Man kann sogar kreativ werden und zeigen, dass alle Lösungen dieser Differentialgleichung neben $x(t) = 0$ wie folgt sind:

$$x(t) = \pm \left(\frac{2}{3} \max(0, t - c) \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nimmt man $c \geq 0$ dann ist sogar der Anfangswert erfüllt.

Die oben genannte Schwierigkeit kann man überwinden durch Anwendung des Fixpunktsatzes von Schauder oder durch eine besondere Wahl einer approximierenden Folge. Wir folgen diesem zweiten Ansatz, den man auch findet im Buch von Walter [5].

Proposition 11.7 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existiert mindestens eine stetig differenzierbare Funktion $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x'(t) = f(t, x(t))$ und $x(a) = x_0$.

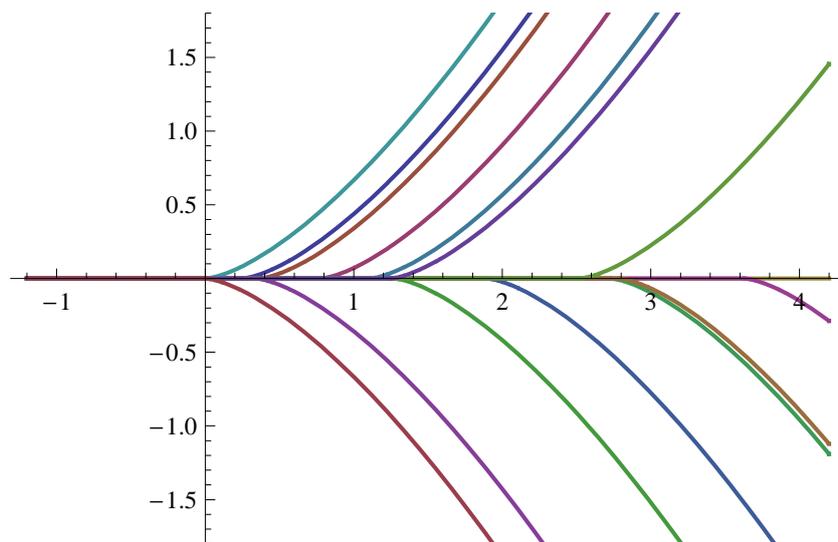


Abbildung 11.1: Einige Lösungen des Anfangswertproblems aus Beispiel 11.6.

Bemerkung 11.7.1 Schaut man den folgenden Beweis genau an, dann sieht man, dass er nicht konstruktiv ist. Man findet die Existenz einer approximierenden Folge, jedoch keine explizite approximierende Folge. Für die meisten konkreten Beispiele kann man zeigen, dass die Folge in (11.3) konvergiert. Im Allgemeinen hat man aber nur die Konvergenz einer Teilfolge.

Beweis. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}^+$ die Funktionen $x_n : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 \quad \text{für } t \leq a \quad \text{und} \\ x_n(t) &= x_0 + \int_a^t f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds \quad \text{für } t > a. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Bemerke, dass $x_n(t)$ für $t \in [a, a + \frac{1}{n}]$ definiert ist durch

$$x_n(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x_0) ds, \quad (11.4)$$

und auf $(a + \frac{1}{n}, a + \frac{2}{n}]$ durch

$$x_n(t) = x_0 + \int_a^{a+1/n} f(s, x_0) ds + \int_{1/n}^t f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds, \quad (11.5)$$

denn $x_n(s - \frac{1}{n})$ ist schon definiert in (11.4). Dieses Prozedere setzt man fort. Es bedeutet, dass x_n eindeutig definiert ist auf $[a, b]$.

Weil f beschränkt ist, sagen wir $|f| \leq M$, folgt

$$|x_n(t)| \leq |x_0| + M(b - a) =: C$$

und

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds \right| \leq M |t_1 - t_2|.$$

Also ist $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ beschränkt und sogar gleichgradig stetig auf $[a, b]$.

Das Theorem von Arzela-Ascoli liefert uns eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Nennen wir den Limes \hat{x} , dann gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} |x_{n_k}(t) - \hat{x}(t)| = 0.$$

Weil

$$\begin{aligned} \left| x_{n_k} \left(t - \frac{1}{n_k} \right) - \hat{x}(t) \right| &\leq \left| x_{n_k} \left(t - \frac{1}{n_k} \right) - x_{n_k}(t) \right| + |x_{n_k}(t) - \hat{x}(t)| \leq \\ &\leq M \frac{1}{n_k} + |x_{n_k}(t) - \hat{x}(t)| \end{aligned}$$

gilt auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} \left| x_{n_k} \left(t - \frac{1}{n_k} \right) - \hat{x}(t) \right| = 0.$$

Weil außerdem f gleichmäßig stetig ist auf $[a, b] \times [-C, C]$, darf man Integral und Grenzwert vertauschen und es folgt, dass

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_0 + \int_a^t f \left(s, x_{n_k} \left(s - \frac{1}{n_k} \right) \right) ds \right) \\ &= x_0 + \int_a^t \lim_{k \rightarrow \infty} f \left(s, x_{n_k} \left(s - \frac{1}{n_k} \right) \right) ds = \\ &= x_0 + \int_a^t f \left(s, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \left(s - \frac{1}{n_k} \right) \right) ds = x_0 + \int_a^t f(s, \hat{x}(s)) ds. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von \hat{x} und f zeigt, dass $s \mapsto f(s, \hat{x}(s))$ stetig und dass $t \mapsto \int_a^t f(s, \hat{x}(s)) ds$ stetig differenzierbar ist. Dann ist auch \hat{x} stetig differenzierbar und \hat{x} erfüllt das Anfangswertproblem. ■

Eine Bedingung, die wir noch loswerden möchten, ist die Beschränktheit von f auf $[a, b] \times \mathbb{R}$.

11.4 Existenz nach Peano

Theorem 11.8 Nehmen wir $R = [a, b] \times [c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $a < t_0 < b$ und $c < x_0 < d$.

1. Dann hat

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (11.6)$$

mindestens eine Lösung $x : [t_-, t_+] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t_- < t_0 < t_+$.

2. Jede Lösung von (11.6) kann fortgesetzt werden bis auf den Rand von $[a, b] \times [c, d]$. Das heißt, wenn $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung ist mit (t_-, t_+) maximal, dann ist $x : [t_-, t_+] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung und es gilt:

- $t_- = a$ oder $x(t_-) = c$ oder $x(t_-) = d$;
- $t_+ = b$ oder $x(t_+) = c$ oder $x(t_+) = d$.

Bemerkung 11.8.1 Dieses Ergebnis lässt sich auch übertragen auf das Anfangswertproblem für Systeme von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (11.7)$$

Beweis. 1. Wir erweitern $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer Funktion $\tilde{f} : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, c) & \text{für } x < c, \\ f(t, x) & \text{für } c \leq x \leq d, \\ f(t, d) & \text{für } d < x. \end{cases}$$

Dann ist \tilde{f} stetig und beschränkt auf dem Streifen $[a, b] \times \mathbb{R}$ und wir können Proposition 11.7 verwenden. Wir finden eine Lösung $\tilde{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (11.8)$$

Setzen wir $M := \max \{|f(t, x)|; (t, x) \in R\}$ so folgt $|\tilde{f}(t, \tilde{x}(t))| \leq M$ und

$$|\tilde{x}(t) - x_0| \leq M(t - t_0).$$

So lange $c \leq x_0 \pm M(t - t_0) \leq d$ gilt, also für

$$|t - t_0| \leq \frac{1}{M} \min(d - x_0, x_0 - c), \quad (11.9)$$

gilt $\tilde{x}(t) \in [c, d]$ und auch $\tilde{f}(t, \tilde{x}(t)) = f(t, \tilde{x}(t))$. So ist \tilde{x} eine Lösung von (11.6) für t wie in (11.9).

2. Wenn $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung ist, dann kann man wie im Beweis von Theorem 6.5 zeigen, dass $\lim_{t \downarrow t_-} x(t_-)$ und $\lim_{t \uparrow t_+} x(t_+)$ existieren. Dies bedeutet, dass die Lösung erweiterbar ist auf $[t_-, t_+]$. Auch kann man zeigen, wie im Beweis von Theorem 6.5, dass, wenn $(t_-, x(t_-)) \in R^\circ$ oder wenn $(t_+, x(t_+)) \in R^\circ$ gilt, man ein neues Randwertproblem lösen kann, nämlich

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1. \end{cases} \quad \text{mit } t_1 = t_\pm \text{ und } x_1 = x(t_\pm). \quad (11.10)$$

Eine Lösung von (11.10) setzt die jetzige Lösung x fort. Dieser Teil des Beweises von Theorem 6.5 braucht nur die gleichmäßige Stetigkeit von f und nicht die Lipschitz-Bedingung. ■

Beispiel 11.9 Dieses Beispiel kommt aus dem Buch von Walter [5] und zeigt, wieso wir beim Beweis von Proposition 11.7 nicht die Approximationsfolge von Picard-Lindelöf verwenden können. Betrachte

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - 2\sqrt{\max(x(t), 0)} \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (11.11)$$

Die Picard-Iteration für

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ist definiert durch

$$x_0(t) = x(t_0) \text{ und } x_{n+1}(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}x_0(t) &= 0, \\x_1(t) &= \int_0^t 2s ds = t^2, \\x_2(t) &= \int_0^t (2s - 2\sqrt{s^2}) ds = 0, \\x_3(t) &= \int_0^t 2s ds = t^2, \\&\text{usw.}\end{aligned}$$

und man findet $x_{2n}(t) = 0$ und $x_{2n+1}(t) = t^2$. Die Funktionenfolge konvergiert nicht. Man kann konvergente Teilfolgen nehmen und würde dann zwei Grenzfunktionen finden:

$$x_{\infty,1}(t) = t^2 \text{ und } x_{\infty,2}(t) = 0.$$

Man zeigt jedoch sofort, dass diese Funktionen beide keine Lösung geben.

Das Theorem von Peano gibt uns trotzdem die Existenz von mindestens einer Lösung. Man kann diese Lösung sogar explizit berechnen. Wenn man $x(t) = ct^2$ versucht mit $c \geq 0$, dann folgt für $t \geq 0$, dass

$$x'(t) = 2ct \text{ und } 2t - 2\sqrt{\max(x(t), 0)} = 2(1 - \sqrt{c})t.$$

Löst man $c = 1 - \sqrt{c}$, dann folgt für $t \geq 0$ die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) t^2.$$

Auf ähnliche Art findet man eine Formel für eine Lösung auf $(-\infty, 0]$. Man kann beide Formeln kombinieren zu einer Lösung auf \mathbb{R} :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) t^2 & \text{für } t \geq 0, \\ \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) t^2 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Man kann sogar zeigen, dass die Lösung eindeutig ist. Erstens bemerkt man, dass eine Lösung nicht negativ werden kann. Denn wenn $x(t) < 0$ auf (t_1, t_2) mit $0 \leq t_1 < t_2$, dann gilt $x'(t) = 2t$ und x ist streng monoton wachsend und das passt nicht zu $x(0) = 0$. Ähnliches gilt für $t_1 < t_2 \leq 0$. Nehmen wir an es gibt zwei positive Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ und $x_1(t) > x_2(t)$ auf (t_1, t_2) . Weil $x \mapsto f(t, x) = 2t - 2\sqrt{\max(x, 0)}$ streng fallend ist für $x > 0$, gilt

$$\begin{aligned}0 &\leq x_1(t_2) - x_2(t_2) = \\&= x_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x_1(s)) ds - x_2(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f(s, x_2(s)) ds = \\&= \int_{t_1}^{t_2} (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))) ds < 0,\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Dies zeigt die Eindeutigkeit nach rechts. Ähnliches gilt, wenn man statt $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ annimmt, dass $x_1(t_2) = x_2(t_2)$ gilt. Auch hier folgt ein Widerspruch bei $x_1(t) > x_2(t)$ auf (t_1, t_2) , und so hat man auch die Eindeutigkeit nach links.

Beispiel 11.10 Betrachten wir

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{x(t)}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Das Theorem von Picard-Lindelöf kann man anwenden auf $\mathbb{R} \times [\varepsilon, \infty)$ mit $\varepsilon > 0$, da nur hier die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist. Peano liefert sogar die Existenz einer Lösung auf $\mathbb{R} \times [\varepsilon, \infty)$. Rechnet man, so folgt als einzige Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2}t)^2 & \text{für } t \leq 2, \\ 0 & \text{für } t > 2. \end{cases} \quad (11.12)$$

Die Eindeutigkeit folgt mit Picard-Lindelöf, wenn $x(t) > 0$ ist. Weil die Differentialgleichung nicht definiert ist für $x(t) < 0$, können wir nur $x(t) \geq 0$ betrachten. Weil $x'(t) \leq 0$ für $x(t) \geq 0$, sind alle Lösungen fallende Funktionen und dies bedeutet, dass wenn $x(t_1) = 0$ gilt, dann folgt $x(t) = 0$ für $t > t_1$.

Beispiel 11.11 Betrachten wir

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

dann gibt es die Möglichkeit in (11.12). Man zeigt jedoch direkt, dass es noch mehrere Lösungen gibt, denn für jedes $\alpha \geq 2$ ist auch $x_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{2}t)^2 & \text{für } t \leq 2, \\ 0 & \text{für } 2 < t \leq 2\alpha, \\ -(\frac{1}{2}t - \alpha)^2 & \text{für } t > 2\alpha, \end{cases}$$

eine Lösung.

Wenn aus der Vorlesung Funktionalanalysis der Fixpunktsatz von Schauder bekannt ist, sieht der Beweis des Theorems von Peano einfacher aus. Vollständigkeitshalber bringen wir diesen Satz.

Theorem 11.12 (Fixpunktsatz von Schauder) Sei D eine abgeschlossene konvexe Menge eines Banachraumes B und sei $T : D \rightarrow B$ ein stetiger und kompakter Operator mit $T(D) \subset D$. Dann hat T mindestens einen Fixpunkt in D .

Bemerkung 11.12.1 Seien B_1 und B_2 Banachräume und sei $D \subset B_1$. Ein Operator $T : D \subset B_1 \rightarrow B_2$ heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Menge $A \subset D$ gilt, dass $\overline{T(A)}$ kompakt ist. Dies ist äquivalent zu: Für jede beschränkte Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ existiert eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass $\{Tx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert in B_2 .

Bemerkung 11.12.2 Um das Theorem von Peano zu beweisen nimmt man

$$\begin{aligned} B &= (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \quad \text{mit} \\ D &= \{x \in C([a, b]); \|x(\cdot) - x_0\|_\infty \leq R\} \end{aligned}$$

und betrachtet $T : D \rightarrow B$ definiert durch

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds$$

mit erstmal $|t - a| < \delta$ und $\delta > 0$ genügend klein.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 12



Randwertprobleme

12.1 Beispiele

Wenn wir mit einem Schneeball etwas treffen möchten, und wir dies vorher modellieren, dann bekommen wir ein System von Differentialgleichungen, bei dem Anfang und Ende festgelegt sind. Bis zu diesem Kapitel hatten wir nur Anfangswertprobleme und es ist kein Ergebnis formuliert für Randwertprobleme.

Als Grundregel gilt immer noch, dass eine Differentialgleichung n -ter Ordnung bei der „Lösung“ n Konstanten mit sich bringt und man für die Eindeutigkeit dann mindestens n unabhängige Bedingungen braucht. Ob dies ausreicht und was hier Unabhängigkeit heißt, ist nicht sofort deutlich.

Bedingungen für die Eindeutigkeit bei einer Differentialgleichung 4-ter Ordnung könnten zum Beispiel zwei Anfangswerte und zwei Endwerte sein. Ein allgemeines Ergebnis, so wie man das bei Anfangsbedingungen mit dem Theorem von Picard-Lindelöf bekommt, gibt es jedoch nicht bei Randwertproblemen. Wir werden nur einige Ergebnisse vorstellen für lineare Randwertprobleme. Vorher jedoch zeigen wir einige Beispiele.

Beispiel 12.1 *Wir betrachten das lineare Randwertproblem*

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = e^t, \\ u(0) = 0 \text{ und } u(T) = 0. \end{cases} \quad (12.1)$$

Weil die Differentialgleichung linear ist mit konstanten Termen, kann man alle Lösungen explizit berechnen:

$$u(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{1}{2}e^t.$$

Die Randbedingungen geben

$$\begin{aligned} 0 = u(0) &= c_2 + \frac{1}{2} &\implies c_2 &= -\frac{1}{2}, \\ 0 = u(T) &= c_1 \sin T - \frac{1}{2} \cos T + \frac{1}{2}e^T &\implies c_1 &= \frac{\cos T - e^T}{2 \sin T}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gibt ein Problem, wenn $T = k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}^+$. Man findet:

- Für $T = k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ hat (12.1) keine Lösung.
- Für $T \in \mathbb{R}^+ \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{N}^+\}$ hat (12.1) genau eine Lösung.

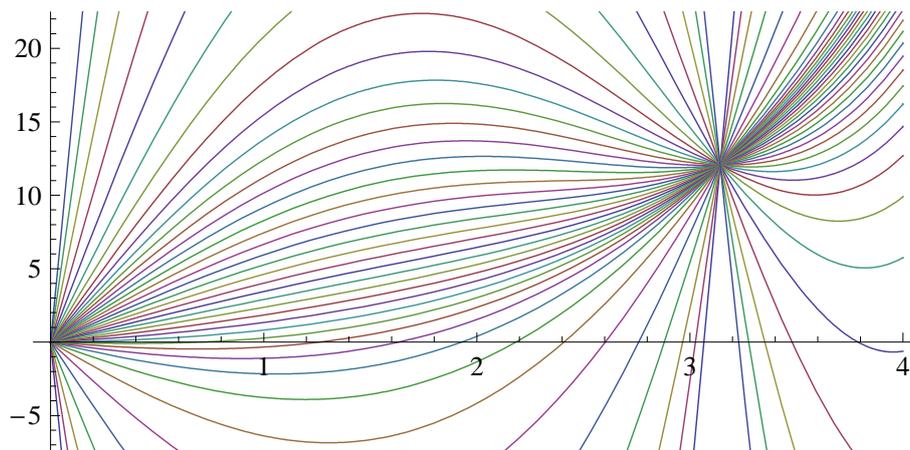
Jede Lösung u der Differentialgleichung mit $u(0) = 0$ erfüllt die Bedingung $u(\pi) = \frac{1}{2}(e^\pi - 1)$. Also gilt für

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = e^t, \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\pi) = \frac{1}{2}(e^\pi - 1), \end{cases} \quad (12.2)$$

dass:

- (12.2) hat unendlich viele Lösungen.

In der nächsten Abbildung sind Lösungen von $u''(t) + u(t) = e^t$ skizziert.



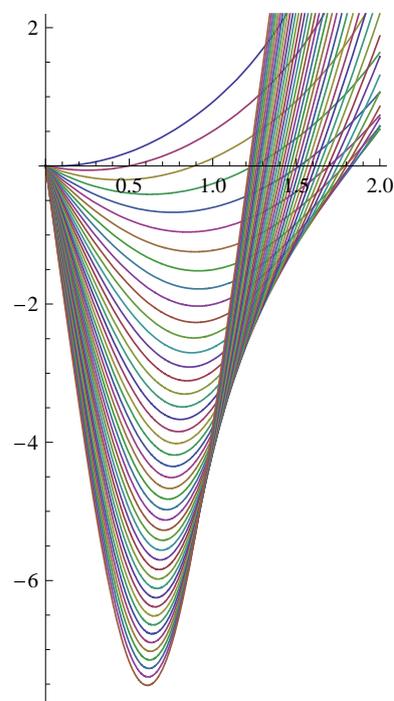
Beispiel 12.2 Lösungen für das nicht-lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} v''(t) = 2 + v(t)^2, \\ v(0) = 0 \text{ und } v(T) = 0 \end{cases}$$

kann man nicht nur nicht mehr durch eine Formel darstellen, sondern für $T > 1.85 \dots$ gibt es sie überhaupt nicht mehr. Leicht lässt sich diese Behauptung nicht beweisen. Betrachtet man die numerisch approximierten Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} v''(t) = 2 + v(t)^2, \\ v(0) = 0 \text{ und } v'(0) = \alpha \end{cases}$$

dann ist diese Behauptung glaubwürdig. Die Nicht-linearität sorgt dafür, dass v'' sehr gross wird, wenn v groß wird. Das führt dazu, dass für α sehr negativ, die Lösung, nachdem sie hinuntergeschossen wurde, sogar besonders schnell wieder hochklettert.



Mit diesen beiden Beispielen sollte es klar sein, dass man für Randwertprobleme nicht einen so allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz formulieren kann wie für Anfangswertprobleme. Wir werden uns fast immer beschränken auf Randwertprobleme für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

12.2 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Die allgemeine Version eines solchen Randwertproblems ist

$$\begin{cases} u''(x) + r(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) + \alpha_3 u(b) + \alpha_4 u'(b) = \eta, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) + \beta_3 u(a) + \beta_4 u'(a) = \xi. \end{cases} \quad (12.3)$$

Präzise gesagt: die Funktionen $f, q, r : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ sind vorgegeben wie auch die Konstanten α_i, β_i für $i = 1, \dots, 4$ und η, ξ . Die Funktion u wird gesucht. Spezifische Randwertbedingungen sind:

- **Dirichlet:** $u(a) = \eta$ und $u(b) = \xi$.
- **Neumann:** $u'(a) = \eta$ und $u'(b) = \xi$.
- **Robin:** $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta$ und $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \xi$ mit $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ und $\beta_1 \beta_2 \neq 0$.
- **Periodische:** $u(a) - u(b) = 0$ und $u'(a) - u'(b) = 0$.

Oft werden nur homogene Randwerte betrachtet. Das heißt, man setzt $\eta = \xi = 0$. Dass solches kaum einen Verlust der Allgemeinheit bedeutet, sieht man wie folgt. Man nehme eine beliebige zweimal differenzierbare Funktion w mit der einzigen Einschränkung, dass w beide Randbedingungen erfüllen sollte:

$$\begin{aligned} \alpha_1 w(a) + \alpha_2 w'(a) + \alpha_3 w(b) + \alpha_4 w'(b) &= \eta, \\ \beta_1 w(b) + \beta_2 w'(b) + \beta_3 w(a) + \beta_4 w'(a) &= \xi. \end{aligned}$$

Setzt man nun $\tilde{u} = u - w$, dann hat man statt (12.3) das folgende Randwertproblem bekommen:

$$\begin{cases} \tilde{u}''(x) + r(x)\tilde{u}'(x) + q(x)\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ \alpha_1 \tilde{u}(a) + \alpha_2 \tilde{u}'(a) + \alpha_3 \tilde{u}(b) + \alpha_4 \tilde{u}'(b) = 0, \\ \beta_1 \tilde{u}(b) + \beta_2 \tilde{u}'(b) + \beta_3 \tilde{u}(a) + \beta_4 \tilde{u}'(a) = 0, \end{cases} \quad (12.4)$$

mit

$$\tilde{f}(x) = f(x) - w''(x) - r(x)w'(x) - q(x)w(x).$$

12.3 Sturmische Randwertaufgaben

Jacques Charles François Sturm (1803-1855) hat sich den folgenden Typ genauer angeschaut:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \xi. \end{cases} \quad (12.5)$$

mit den folgenden Annahmen.

Bedingung 12.3 (Für das Sturmische Randwertproblem)

- $q \in C[a, b]$,
- $p \in C^1[a, b]$ ist positiv: $p(x) > 0$ für $x \in [a, b]$,
- $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ und $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Die Aufgabe ist:

Für $f \in C[a, b]$ und $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ suche man eine Lösung $u \in C^2[a, b]$.

Die Sturmsche Randwertaufgabe (12.5) enthält Problem (12.3) für die ersten drei Typen von Randwerten. Denn es gilt

$$\frac{1}{p(x)} \frac{d}{dx} (p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = u''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}u'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}u(x)$$

und wenn man $\frac{p'(x)}{p(x)} = r(x)$ und $\frac{q(x)}{p(x)} = \tilde{q}(x)$ löst, sind beide Differentialgleichungen ineinander zu überführen. Man kann diese beiden letzten Gleichungen lösen durch

$$p(x) = e^{\int_0^x r(s)ds} \quad \text{und} \quad q(x) = \tilde{q}(x)e^{\int_0^x r(s)ds}.$$

Den Vorteil der Schreibweise in (12.5) wird man später sehen.

- Wir definieren den Differentialoperator $\mathcal{L} : C^2[a, b] \rightarrow C[a, b]$ durch

$$(\mathcal{L}u)(x) = \frac{d}{dx} (p(x)u'(x)) + q(x)u(x). \quad (12.6)$$

Die folgende Identität gilt:

Lemma 12.4 (Lagrange-Identität) Sei \mathcal{L} wie in (12.6). Dann folgt

$$v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}v = (p(u'v - uv'))'. \quad (12.7)$$

Dieses Ergebnis folgt direkt aus der Produktregel beim Differenzieren.

- Wir definieren auch die Randoperatoren $\mathcal{R}_\ell : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathcal{R}_r : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\ell u &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a), \\ \mathcal{R}_r u &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Theorem 12.5 (Eindeutigkeit) Sei \mathcal{L} , \mathcal{R}_ℓ und \mathcal{R}_r definiert in (12.6) und (12.8) mit $p \in C^1[a, b]$ positiv und $q \in C[a, b]$. Wenn $\{u_1, u_2\}$ zwei unabhängige Lösungen¹ von $\mathcal{L}u = 0$ sind und

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell u_1 & \mathcal{R}_\ell u_2 \\ \mathcal{R}_r u_1 & \mathcal{R}_r u_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (12.9)$$

dann hat (12.5) für jedes $f \in C[a, b]$ und $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung $u \in C^2[a, b]$.

Bemerkung 12.5.1 Der Differentialoperator \mathcal{L} ist linear von Ordnung zwei. Das bedeutet, dass $\mathcal{L}u = 0$ zwei unabhängige² Lösungen u_1, u_2 hat. Man nennt $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem für $\mathcal{L}u = 0$. Für jede Lösung u von $\mathcal{L}u = 0$ gibt es zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \quad \text{für } x \in [a, b].$$

¹Die Funktionen $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $i = 1, \dots, n$ sind linear unabhängig, wenn

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

impliziert, dass $c_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

²Die Funktionenmenge $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ heißt unabhängig, wenn aus $\sum_{i=1}^m c_i u_i(x) = 0$ folgt $c_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Beweis. Sei $u^* \in C^2[a, b]$ eine solche Lösung. Die allgemeine Lösung von $\mathcal{L}u = f$ kann man dann schreiben als

$$u(x) = u^*(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Wenn diese Funktion u auch das Randwertproblem löst, dann folgt, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell u \\ \mathcal{R}_r u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell u^* + c_1 \mathcal{R}_\ell u_1 + c_2 \mathcal{R}_\ell u_2 \\ \mathcal{R}_r u^* + c_1 \mathcal{R}_r u_1 + c_2 \mathcal{R}_r u_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell u^* \\ \mathcal{R}_r u^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell u_1 & \mathcal{R}_\ell u_2 \\ \mathcal{R}_r u_1 & \mathcal{R}_r u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell u_1 & \mathcal{R}_\ell u_2 \\ \mathcal{R}_r u_1 & \mathcal{R}_r u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weil (12.9) gilt, folgt $c_1 = c_2 = 0$ und $u = u^*$. ■

12.4 Greensche Funktion für die Sturmsche Randwertaufgabe

Theorem 12.6 (Existenz und Lösungsformel) Sei \mathcal{L} definiert in (12.6) mit $p \in C^1[a, b]$ positiv und $q \in C[a, b]$ und sei $\mathcal{R}_\ell, \mathcal{R}_r$ definiert in (12.8). Sei u_ℓ , beziehungsweise u_r , eine nicht-triviale Lösung von

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \text{ in } (a, b), \\ \mathcal{R}_\ell u = 0, \end{cases} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \text{ in } (a, b), \\ \mathcal{R}_r u = 0. \end{cases} \quad (12.10)$$

Wenn $\{u_r, u_\ell\}$ unabhängig ist, dann gilt folgendes.

1. Die Greensche Funktion $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist wohldefiniert durch

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{u_\ell(x)u_r(y)}{p(y)W(y)} & \text{für } a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{u_r(x)u_\ell(y)}{p(y)W(y)} & \text{für } a \leq y < x \leq b, \end{cases} \quad (12.11)$$

mit $W(y) = u_\ell(y)u_r'(y) - u_\ell'(y)u_r(y)$ und die Funktion G ist stetig.

2. Für $f \in C[a, b]$ und G in (12.11) ist die Funktion

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy \quad (12.12)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ in } (a, b), \\ \mathcal{R}_\ell u = 0 \text{ und } \mathcal{R}_r u = 0. \end{cases} \quad (12.13)$$

Bemerkung 12.6.1 Diese Methode kann man erweitern für allgemeinere lineare Randwertprobleme. Die Funktion $y \mapsto p(y)W(y)$ ist konstant für die Sturmsche Randwertaufgabe wegen (12.7).

Beweis. Die Funktionen u_r und u_ℓ kann man finden als Lösung eines Anfangswertproblems. Zum Beispiel sei u_ℓ die Lösung von

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = 0 \text{ für } x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha_2 \text{ und } u'(a) = -\alpha_1. \end{cases} \quad (12.14)$$

Dieses Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung u_ℓ und es gilt

$$\mathcal{R}_\ell u_\ell = \alpha_1 u_\ell(a) + \alpha_2 u'_\ell(a) = 0.$$

Weil $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ ist u_ℓ nicht trivial. Ähnlich findet man eine nicht-triviale Lösung u_r von $\mathcal{L}u = 0$ mit $\mathcal{R}_r u = 0$. Bemerke, dass u_ℓ und u_r , abgesehen von einer Skalierung, eindeutig festliegen.

Aus der Lagrange-Identität folgt

$$0 = u_\ell \mathcal{L}u_r - u_r \mathcal{L}u_\ell = (p(u'_r u_\ell - u_r u'_\ell))',$$

also gilt $p(u'_r u_\ell - u_r u'_\ell)$ ist konstant auf $[a, b]$. Weil $0 \neq p \in C[a, b]$ gilt, folgt entweder

$$u'_r(x) u_\ell(x) = u_r(x) u'_\ell(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \quad (12.15)$$

oder

$$u'_r(x) u_\ell(x) \neq u_r(x) u'_\ell(x) \text{ für alle } x \in [a, b]. \quad (12.16)$$

Wenn (12.15) gilt, dann gilt

$$0 = \det \begin{pmatrix} u_\ell(a) & u_r(a) \\ u'_\ell(a) & u'_r(a) \end{pmatrix}$$

und es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} u_r(a) \\ u'_r(a) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} u_\ell(a) \\ u'_\ell(a) \end{pmatrix}.$$

Aus der Eindeutigkeit vom linearen Anfangswertproblem folgt, dass $u_r(x) = cu_\ell(x)$ und ein Widerspruch mit der Annahme, dass $\{u_r, u_\ell\}$ unabhängig ist. Also gilt (12.16) und

$$p(y)W(y) \neq 0 \text{ für alle } y \in [a, b].$$

Somit ist G wohldefiniert.

Weil zusätzlich gilt, dass

$$\lim_{y \downarrow x} G(x, y) = \lim_{y \uparrow x} G(x, y),$$

ist die Greensche Funktion sogar stetig auf $[a, b]^2$.

Dass man nun tatsächlich eine Lösung des Randwertproblems findet, folgt durch direktes Rechnen. Das ist zwar nicht besonders elegant aber sehr effektiv. Man hat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_a^b G(x, y) f(y) dy \right) &= \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{u_r(x)u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + \int_x^b \frac{u_\ell(x)u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy \right) \\ &= u'_r(x) \int_a^x \frac{u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + u_r(x) \frac{u_\ell(x)}{p(x)W(x)} f(x) \\ &\quad + u'_\ell(x) \int_x^b \frac{u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy - u_\ell(x) \frac{u_r(x)}{p(x)W(x)} f(x) \\ &= \int_a^x \frac{u'_r(x)u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + \int_x^b \frac{u'_\ell(x)u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left(\int_a^b G(\cdot, y) f(y) dy \right) (x) &= \\
 &= \frac{d}{dx} \left(p(x) \int_a^x \frac{u'_r(x) u_\ell(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy \right) + \frac{d}{dx} \left(p(x) \int_x^b \frac{u'_\ell(x) u_r(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy \right) \\
 &\quad + q(x) \int_a^b G(x, y) f(y) dy \\
 &= \left((p(x) u'_r(x))' + q(x) u_r(x) \right) \int_a^x \frac{u_\ell(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy + p(x) u'_r(x) \frac{u_\ell(x)}{p(x) W(x)} f(x) \\
 &\quad + \left((p(x) u'_\ell(x))' + q(x) u_\ell(x) \right) \int_x^b \frac{u_r(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy - p(x) u'_\ell(x) \frac{u_r(x)}{p(x) W(x)} f(x) \\
 &= (\mathcal{L} u_r)(x) \int_a^x \frac{u_\ell(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy + (\mathcal{L} u_\ell)(x) \int_x^b \frac{u_r(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy \\
 &\quad + \frac{p(x) (u_\ell(x) u'_r(x) - u'_\ell(x) u_r(x))}{p(x) W(x)} f(x) = \\
 &= 0 + 0 + f(x).
 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind erfüllt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_\ell \left(\int_a^b G(\cdot, y) f(y) dy \right) &= \alpha_1 \int_a^b \frac{u_\ell(a) u_r(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy + \alpha_2 \int_a^b \frac{u'_\ell(a) u_r(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy \\
 &= (\alpha_1 u_\ell(a) + \alpha_2 u'_\ell(a)) \int_a^b \frac{u_r(y)}{p(y) W(y)} f(y) dy = 0.
 \end{aligned}$$

Ähnliches gilt für $\mathcal{R}_r \left(\int_a^b G(\cdot, y) f(y) dy \right)$. ■

Beispiel 12.7 Wir betrachten

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \text{für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (12.17)$$

Man nehme $u_\ell(x) = 1 + x$ und $u_r(x) = 1 - x$. Diese Funktionen sind nicht trivial, erfüllen die homogene Differentialgleichung und die zugehörige Randbedingung. Es folgt

$$W(x) = u_\ell(x) u'_r(x) - u'_\ell(x) u_r(x) = (1 + x)(-1) - 1(1 - x) = -2$$

und die Greensche Funktion wird

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} (1 + x)(1 - y) & \text{für } -1 \leq x \leq y \leq 1, \\ -\frac{1}{2} (1 - x)(1 + y) & \text{für } -1 \leq y < x \leq 1. \end{cases} \quad (12.18)$$

Man „sieht“ diese Greensche Funktion, wenn man Wäsche aufhängt. Die Gewichtsichte f ist durch die Wäscheklammer an einem Punkt y konzentriert und die „Lösung“ ist die Funktion $x \mapsto G(x, y)$.

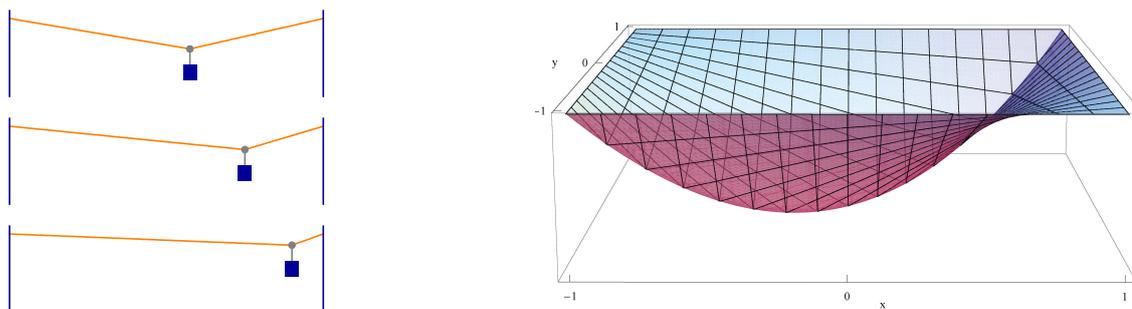


Abbildung 12.1: Die Greensche Funktion für Beispiel 12.7 als Wäscheleine. Links $x \mapsto G(x, y)$ für drei verschiedene y und rechts $(x, y) \mapsto G(x, y)$.

Beispiel 12.8 Wir betrachten nochmals

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) \text{ für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Versuchen wir zu Fuß eine Lösung zu finden: Integrieren liefert:

$$u'(x) = c_1 + \int_{-1}^x f(s) ds,$$

$$u(x) = c_1 x + c_2 + \int_{-1}^x \left(\int_{-1}^t f(s) ds \right) dt.$$

Die Randbedingungen sind erfüllt, wenn

$$0 = -c_1 + c_2 \text{ und } c_1 + c_2 + \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^t f(s) ds \right) dt = 0.$$

Man berechnet c_1 und c_2 und findet, dass die Lösung wie folgt ist:

$$u(x) = -\frac{1}{2}(1+x) \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^t f(s) ds \right) dt + \int_{-1}^x \left(\int_{-1}^t f(s) ds \right) dt.$$

Diese Formel kann man vereinfachen mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x \left(\int_{-1}^t f(s) ds \right) dt &= \int_{-1}^x \frac{\partial}{\partial t} \left((t-x) \int_{-1}^t f(s) ds \right) dt - \int_{-1}^x (t-x) f(t) dt = \\ &= \int_{-1}^x (x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2}(1+x) \int_{-1}^1 (1-t) f(t) dt + \int_{-1}^x (x-t) f(t) dt \\ &= \int_{-1}^x \left(-\frac{1}{2}(1+x)(1-t) + (x-t) \right) f(t) dt + \int_x^1 -\frac{1}{2}(1+x)(1-t) f(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 G(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

mit $G(x, t)$ als in (12.18).

12.5 Regularität

Die dritte Bedingung von Hadamard für ein wohldefiniertes Problem ist, dass die Lösung stetig vom Problem abhängt. Das heißt, ändert man das Problem ein wenig, ändert sich auch die Lösung nur wenig. Für eine genaue Formulierung brauchen wir die passenden Funktionenräume.

- Die stetigen Funktionen $C[a, b]$ werden mit $\|\cdot\|_\infty$, definiert durch

$$\|f\|_\infty = \max \{|f(x)|; x \in [a, b]\}$$

ein normierter Vektorraum $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Dieser normierte Vektorraum ist sogar ein Banachraum: Cauchy-Folgen sind konvergent. Übrigens schreibt man oft statt $\|\cdot\|_\infty$ auch $\|\cdot\|_{C[a,b]}$.

- Sei $k \in \mathbb{N}^+$. Die Funktionenmenge $C^k[a, b]$ wird ein Banachraum, wenn man die Norm $\|\cdot\|_{C^k[a,b]}$, definiert durch

$$\|f\|_{C^k[a,b]} = \sum_{m=0}^k \|f^{(m)}\|_{C[a,b]}$$

verwendet.

Mit Hilfe der Greenschen Funktion G aus (12.11) kann man den Greenschen Operator $\mathcal{G} : C[a, b] \rightarrow C^2[a, b]$ definieren:

$$(\mathcal{G}f)(x) := \int_a^b G(x, y) f(y) dy \text{ für } f \in C[a, b].$$

Das nächste Ergebnis zeigt, dass dieser Lösungsoperator \mathcal{G} sogar beschränkt ist.

Theorem 12.9 (Regularität) Sei \mathcal{L} , \mathcal{R}_r und \mathcal{R}_ℓ wie in Theorem 12.6. Dann gibt es $C > 0$ derart, dass folgendes gilt. Sei $f \in C[a, b]$. Für die Lösung $u = \mathcal{G}f$ von

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ in } (a, b), \\ \mathcal{R}_\ell u = 0 \text{ und } \mathcal{R}_r u = 0, \end{cases} \quad (12.19)$$

folgt

$$\|u\|_{C^2[a,b]} \leq C \|f\|_{C[a,b]}. \quad (12.20)$$

Bemerkung 12.9.1 Weil (12.19) linear ist, gilt für $f_1, f_2 \in C[a, b]$ und die zugehörigen Lösungen u_1, u_2 , dass

$$\|u_1 - u_2\|_{C^2[a,b]} \leq C \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]}.$$

Dies gibt die Stetigkeit der Lösungsabbildung $f \mapsto u$ als Abbildung von $C[a, b]$ nach $C^2[a, b]$.

Beweis. Dieses Resultat folgt direkt aus (12.12) und dem Beweis von Theorem 12.6:

$$\begin{aligned}
 |u(x)| &\leq \int_a^b |G(x, y) f(y)| dy \leq \int_a^b |G(x, y)| dy \|f\|_\infty \leq c_0 \|f\|_\infty, \\
 |u'(x)| &\leq \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b G(x, y) f(y) dy \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) f(y) dy \right| \\
 &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) \right| dy \|f\|_\infty \leq c_1 \|f\|_\infty, \\
 |u''(x)| &\leq \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \int_a^b G(x, y) f(y) dy \right| = \left| \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 G(x, y) f(y) dy + \frac{1}{p(x)} f(x) \right| \\
 &\leq \left(\int_a^b \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 G(x, y) \right| dy + \frac{1}{p(x)} \right) \|f\|_\infty \leq (c_2 + c_p) \|f\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Man achte darauf, dass die Ableitungen von $G(x, y)$ für $x = y$ nicht existieren, und dass die Integrale da uneigentlich sind. Außerhalb existieren die Ableitungen und sind sogar beschränkt. Die Konstanten c_i gibt es also und man nehme für C in (12.20) $C = c_0 + c_1 + c_2 + c_p$. ■

12.6 Greensche Funktionen für mehr allgemeine lineare Randwertaufgaben

Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ in } (a, b), \\ \mathcal{R}u = 0, \end{cases} \quad (12.21)$$

wo \mathcal{L} ein linearer Differentialoperator n -ter Ordnung ist:

$$(\mathcal{L}u)(x) = a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)u(x) \quad (12.22)$$

mit $a_k \in C[a, b]$ und $a_n(x) > 0$, und wo $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ lineare Randoperatoren sind:

$$\mathcal{R}_i u = \mathcal{R}_i^\ell u + \mathcal{R}_i^r u := \sum_{k=0}^{n-1} c_{a,i,k} u^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{b,i,k} u^{(k)}(b). \quad (12.23)$$

Wenn

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \text{ in } (a, b), \\ \mathcal{R}u = 0, \end{cases} \quad (12.24)$$

nur die triviale Lösung hat, dann kann man eine Greensche Funktion konstruieren.

Algorithmus 12.10 Für $y \in (a, b)$ berechne man die vom Parameter y abhängige Funktion $x \mapsto g_y(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{L}g_y(x) = 0$ für $x \neq y$, also löse man

(a) $\mathcal{L}g_{y,\ell}(x) = 0$ für $a < x < y$,

(b) $\mathcal{L}g_{y,r}(x) = 0$ für $y < x < b$,

(c) und setze $g_y(x) = \begin{cases} g_{y,\ell}(x) & \text{für } x < y, \\ g_{y,r}(x) & \text{für } x > y, \end{cases}$

und man bestimme die $2n$ Parameter mittels:

2. $\mathcal{R}g_y = 0$,
3. $\lim_{x \uparrow y} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g_y(x) - \lim_{x \downarrow y} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k g_y(x) = 0$ für $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$,
4. $\lim_{x \uparrow y} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} g_y(x) - \lim_{x \downarrow y} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} g_y(x) = \frac{1}{a_n(y)}$.

Wenn genau eine solche Funktion $g_y(x)$ existiert, dann ist

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

für $G(x, y) = g_y(x)$ die eindeutige Lösung von Problem (12.21).

Bemerkung 12.10.1 Um g_y zu finden, müsste man $\mathcal{L}g_y = 0$ auf $[a, y]$ und auf $[y, b]$ lösen. Da würde man dann $2 \times n$ freie Parameter finden. Nehmen wir an, $\mathcal{R}u = 0$ enthält n Bedingungen. Für diese zwei Lösungen $g_{y,\ell}$ und $g_{y,r}$ hätte man dann insgesamt n Randbedingungen aus 2, $n-1$ Randbedingungen aus 3, und eine aus 4. Insgesamt gibt es also auch $2n$ Bedingungen zu erfüllen. Für $2n$ lineare Gleichungen mit $2n$ Unbekannten gibt es entweder genau eine Lösung oder das zugehörige homogene Gleichungssystem hat eine nicht-triviale Lösung. Das heißt, entweder ist die Greensche Funktion eindeutig oder es gibt eine nicht-triviale Lösung von (12.24). Wenn wir die letzte Möglichkeit ausschließen, ist die Greensche Funktion also eindeutig.

Übrigens, wenn die Lösung von (12.21) nicht eindeutig ist, dann ist die Differenz zweier unterschiedlicher Lösungen von (12.21) eine nicht-triviale Lösung von (12.24) und es gibt keine (eindeutige) Greensche Funktion. Als Umkehrschluss findet man bei einer eindeutigen Greenschen Funktion eine eindeutige Lösung von (12.21).

In Formeln wird diese letzte Bemerkung wie folgt. Die lineare Differentialgleichung $\mathcal{L}u = 0$ n -ter Ordnung hat ein Fundamentalsystem $\{u_1, \dots, u_n\}$. Das bedeutet, dass die Lösungen von $\mathcal{L}g_y(x) = 0$ für $x \neq y$ zu schreiben sind als

$$g_y(x) = \begin{cases} c_{1,y}^\ell u_1(x) + c_{2,y}^\ell u_2(x) + \dots + c_{n,y}^\ell u_n(x) & \text{für } x \in [a, y), \\ c_{1,y}^r u_1(x) + c_{2,y}^r u_2(x) + \dots + c_{n,y}^r u_n(x) & \text{für } x \in (y, b]. \end{cases} \quad (12.25)$$

Die Bedingung $\mathcal{R}g_y = 0$ gibt n Gleichungen und die Eigenschaften in 3 und 4 geben nochmals n lineare Gleichungen für die $2n$ Konstanten $c_{i,y}^r$ und $c_{i,y}^\ell$:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^\ell u_1 & \dots & \mathcal{R}_1^\ell u_n & \mathcal{R}_1^r u_1 & \dots & \mathcal{R}_1^r u_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{R}_n^\ell u_1 & \dots & \mathcal{R}_n^\ell u_n & \mathcal{R}_n^r u_1 & \dots & \mathcal{R}_n^r u_n \\ u_1(y) & \dots & u_n(y) & -u_1(y) & \dots & -u_n(y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(y) & \dots & u_n^{(n-1)}(y) & -u_1^{(n-1)}(y) & \dots & -u_n^{(n-1)}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,y}^\ell \\ \vdots \\ c_{n,y}^\ell \\ c_{1,y}^r \\ \vdots \\ c_{i,y}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n(y)} \end{pmatrix}$$

Diese linearen Gleichungen haben entweder genau eine Lösung oder das homogene Problem hat eine nicht-triviale Lösung. Das letztere ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass (12.24) nur die triviale Lösung hat. Mit dieser Annahme gibt es also für jedes $y \in (a, b)$

genau eine Lösung $g_y(x)$. Weil die Einträge in der Matrix mindestens stetig differenzierbar sind als Funktion von y , ist die inverse Matrix auch stetig differenzierbar und es folgt aus der Stetigkeit von $y \mapsto a_n(y)^{-1}$, dass die Konstanten $c_{i,y}^r$ und $c_{i,y}^\ell$ stetig von y abhängen. Dann ist $(x, y) \mapsto g_y(x) : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sogar gleichmäßig stetig, weil $[a, b]^2$ kompakt ist.

Wir zeigen, dass $G(x, y) = g_y(x)$ die passende Greensche Funktion ist.

Aus Eigenschaft 3. folgt mit Induktion, dass für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \int_a^b G(x, y)f(y)dy = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(x, y)f(y)dy,$$

denn

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \int_a^b G(x, y)f(y)dy &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} \int_a^b G(x, y)f(y)dy = \\ & \text{(die Induktionsannahme)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} G(x, y)f(y)dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} G(x, y)f(y)dy + \int_x^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} G(x, y)f(y)dy \right) = \\ &= \lim_{y \uparrow x} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(x, y)f(y)dy + \\ & \quad - \lim_{y \downarrow x} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_x^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(x, y)f(y)dy = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(x, y)f(y)dy. \end{aligned} \tag{12.26}$$

Aus Eigenschaft 4. folgt ähnlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \int_a^b G(x, y)f(y)dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} G(x, y)f(y)dy = \\ &= \lim_{y \uparrow x} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y)f(y)dy + \\ & \quad - \lim_{y \downarrow x} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_x^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y)f(y)dy = \\ &= \frac{1}{a_n(x)}f(x) + \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y)f(y)dy, \end{aligned} \tag{12.27}$$

wobei dieses Integral uneigentlich ist in y . Weil $g_y(x)$ die Form in (12.25) hat, ist die Funktion $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(x, y)$ für $k \leq n-1$ stetig auf $[a, b]$ und $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y)$ ist stetig auf $[a, y) \cup (y, b]$. In y macht diese letzte Funktion einen Sprung.

Zusammengefasst: Ableitungen vom Grad bis einschließlich $n-1$ kann man durch das Integralzeichen schieben und die Ableitung vom Grad n liefert zusätzlich einen extra Term.

Kombiniert man (12.26-12.27) mit (12.22), dann folgt

$$\mathcal{L} \int_a^b G(x, y)f(y)dy = f(x) + \int_a^b \mathcal{L}G(x, y)f(y)dy = f(x).$$

Weil \mathcal{R} höchstens $(n-1)$ -te Ableitungen enthält, folgt auch

$$\mathcal{R} \int_a^b G(x, y)f(y)dy = \int_a^b \mathcal{R}G(x, y)f(y)dy = 0.$$

Die Funktion $x \mapsto \int_a^b G(x, y) f(y) dy$ ist so eine Lösung vom Randwertproblem (12.21).

Theorem 12.11 Seien \mathcal{L} und \mathcal{R} wie in (12.22) und (12.23). Wenn das homogene Randwertsystem (12.24) nur die triviale Lösung hat, dann hat (12.21) für jedes $f \in C[a, b]$ genau eine Lösung $u \in C^n[a, b]$. Außerdem gibt es $C > 0$ derart, dass für jedes $f \in C[a, b]$ die Lösung u die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\|u\|_{C^n[a, b]} \leq C \|f\|_{C[a, b]}.$$

Bemerkung 12.11.1 Wenn die Annahmen im Theorem erfüllt sind, hat man die drei Eigenschaften von Hadamard für ein wohldefiniertes Problem: Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit des Lösungsoperators $f \mapsto u$, genauer gesagt

$$\mathcal{L}^{-1} : C[a, b] \rightarrow \{u \in C^n[a, b]; \mathcal{R}u = 0\}$$

existiert und ist stetig.

Beweis. Die Greensche Funktion, die oben konstruiert worden ist, gibt die Existenz einer Lösung. Aus (12.26) und (12.27) folgt sogar, dass für diese Lösung gilt $u \in C^n[a, b]$.

Wenn es mehrere Lösungen gibt zu dem gleichen f , sagen wir u_1 und u_2 , dann ist $u_1 - u_2$ eine nicht-triviale Lösung der homogenen Gleichung und das ist ein Widerspruch zu der Annahme.

Die Abschätzung folgt aus der Darstellung mit der Greenschen Funktion und

$$\begin{aligned} c_k &= \max_{x \in [a, b]} \int_a^b \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k G(x, y) \right| dy \text{ für } k \leq n-1 \\ c_n &= \max_{x \in [a, b]} \left(\frac{1}{a_n(x)} + \int_a^b \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n G(x, y) \right| dy \right). \end{aligned}$$

Man sollte bemerken, dass die Integrale für c_k mit $k \in \{n-1, n\}$ uneigentlich sind: an der Stelle $y = x$ sind sie nicht definiert. ■

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 13

Nicht-lineare Randwertprobleme



13.1 Lösungen durch Schießen

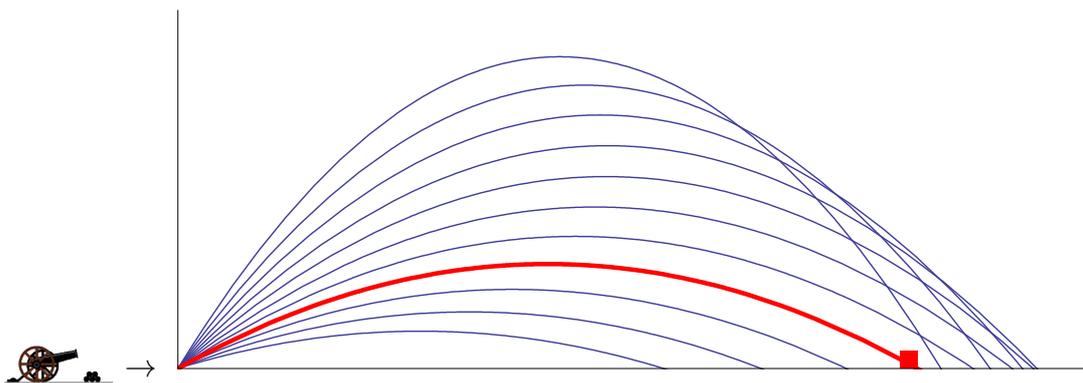


Abbildung 13.1: *Militärischer Satz: Wenn man zu weit und zu kurz schießen kann, dann kann man auch treffen.*

Betrachten wir für $f \in C^1([0, \ell], \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ das nicht-lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (13.1)$$

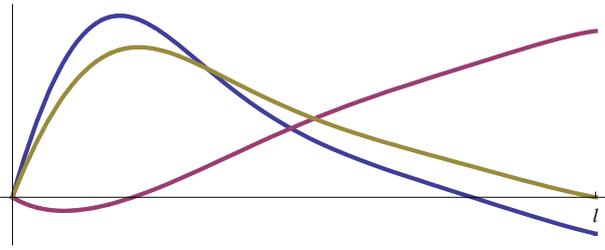
Theorem 13.1 Sei f wie oben und sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ derart, dass die Lösung u_θ vom Anfangswertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u'(0) = \theta \end{cases} \quad (13.2)$$

für jede $\theta \in [a, b]$ beschränkt ist auf $[0, \ell]$, und dass außerdem gilt

$$u_a(\ell) < 0 < u_b(\ell) \text{ oder } u_b(\ell) < 0 < u_a(\ell).$$

Dann gibt es ein $\theta \in (a, b)$ mit $u_\theta(\ell) = 0$.



In dieser Abbildung wird das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = (1 - u(x)^2 - u'(x))(\cos(x) + 1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(4) = 0. \end{cases}$$

betrachtet. Eine Funktion löst die Differentialgleichung mit Anfangswerten $u(0) = 0$ und $u'(0) = 6$; eine zweite mit $u(0) = 0$ und $u'(0) = -1$.

Abbildung 13.2: Anwendung der stetigen Abhängigkeit der Anfangswerte.

Beweis. Für $f \in C^1([0, \ell], \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und Lösungen u_θ von (13.2) mit Existenzintervall $(T_\theta^-, T_\theta^+) \supset [0, \ell]$ existiert

$$M = \max \{ \|(u_\theta(x), u'_\theta(x))\| ; x \in [0, \ell] \text{ und } \theta \in [a, b] \}.$$

Dann ist

$$L = \max \left\{ 1 + \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, v) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x, u, v) \right| ; x \in [0, \ell] \text{ und } \|(u, v)\| \leq M \right\}$$

eine Lipschitz-Konstante für

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x) \\ f(x, u(x), v(x)) \end{pmatrix}.$$

Wegen Korollar 6.12 gilt

$$\begin{aligned} |u_{\theta_1}(x) - u_{\theta_2}(x)| &\leq \left\| \begin{pmatrix} u_{\theta_1}(x) - u_{\theta_2}(x) \\ u'_{\theta_1}(x) - u'_{\theta_2}(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \\ &\leq e^{Lx} \left\| \begin{pmatrix} u_{\theta_1}(0) - u_{\theta_2}(0) \\ u'_{\theta_1}(0) - u'_{\theta_2}(0) \end{pmatrix} \right\| = e^{Lx} |\theta_1 - \theta_2| \end{aligned}$$

und es folgt, dass $\theta \mapsto u_\theta(\ell)$ eine stetige Funktion ist. Der Zwischenwertsatz gibt das gewünschte Ergebnis. ■

13.2 Lösungen zwischen Ober- und Unterlösungen

Betrachten wir für $f \in C^1([0, \ell], \mathbb{R})$ das nicht-lineare Randwertproblem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (13.3)$$

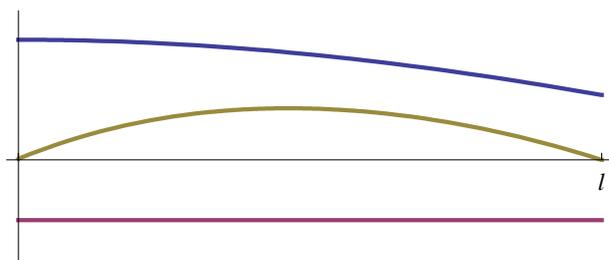
Definition 13.2 Die Funktion $v \in C^2[0, 1]$ heißt eine Oberlösung für (13.3), wenn

$$\begin{cases} -v''(x) \geq f(x, v(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ v(0) \geq 0 \text{ und } v(\ell) \geq 0. \end{cases} \quad (13.4)$$

Die Funktion $w \in C^2[0, 1]$ heißt eine Unterlösung für (13.3), wenn

$$\begin{cases} -w''(x) \leq f(x, w(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ w(0) \leq 0 \text{ und } w(\ell) \leq 0. \end{cases} \quad (13.5)$$

Bemerkung 13.2.1 Wenn eine Funktion gleichzeitig Ober- und Unterlösung ist, dann ist sie eine Lösung.



In dieser Abbildung werden eine Ober-, eine Unter- und eine Lösung zum Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = 5(u(x) + 1)(\cos x - u(x)) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0. \end{cases}$$

dargestellt. Die Unterlösung ist $w(x) = -\frac{1}{2}$, die Oberlösung $v(x) = \cos x$. Für die Lösung gibt es keine explizite Formel.

Abbildung 13.3: Oberlösung oberhalb einer Unterlösung gibt eine Lösung

Theorem 13.3 Wenn es eine Oberlösung v und eine Unterlösung w gibt für (13.3), und wenn $w(x) \leq v(x)$ für $x \in (0, \ell)$, dann gibt es eine Lösung u mit

$$w(x) \leq u(x) \leq v(x) \text{ für } x \in (0, \ell).$$

Beweis. Wir werden mehrere Schritte brauchen.

1. Man ersetzt f durch f^* , das man definiert durch

$$f^*(x, s) = \begin{cases} f(x, w(x)) & \text{für } s \leq w(x), \\ f(x, s) & \text{für } s \in [w(x), v(x)], \\ f(x, v(x)) & \text{für } s \geq v(x). \end{cases}$$

Diese Funktion erfüllt die folgende Lipschitz-Bedingung:

$$|f^*(x, u_1) - f^*(x, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \text{ für alle } x \in [0, \ell] \text{ und } u \in \mathbb{R} \quad (13.6)$$

mit $L \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$L = \max \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right|; x \in [0, \ell], u \in \left[\min_{x \in [0, \ell]} w(x), \max_{x \in [0, \ell]} v(x) \right] \right\}.$$

Wir bemerken, dass eine Lösung u des Randwertproblems

$$\begin{cases} -u''(x) + Lu(x) = f^*(x, u(x)) + Lu(x) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0 \end{cases} \quad (13.7)$$

die zwischen w und v liegt, auch eine Lösung von (13.3) ist. Wir werden nun iterativ eine Lösung von (13.7) konstruieren. Dazu bemerken wir erstens, dass wegen (13.6) für die rechte Seite der Differentialgleichung in (13.7) folgendes gilt:

Hilfslemma 13.3.1 Die Abbildungen $u \mapsto f^*(x, u) + Lu$ sind monoton wachsend für jedes $x \in [0, \ell]$.

Als nächstes schauen wir uns (13.7) mit einer beliebigen rechten Seite an:

$$\begin{cases} -u''(x) + Lu(x) = g(x) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0 \end{cases} \quad (13.8)$$

2. Wegen Theorem 12.11, ist (13.8) eindeutig lösbar mit Hilfe einer Greenschen Funktion, nämlich mit

$$G_L(x, y) = \begin{cases} -\frac{u_\ell(x)u_r(y)}{W(y)} & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq \ell, \\ -\frac{u_\ell(y)u_r(x)}{W(y)} & \text{für } 0 \leq y < x \leq \ell, \end{cases}$$

und

$$u_\ell(x) = \sinh(\sqrt{L}x), \quad u_r(x) = \sinh(\sqrt{L}(\ell - x)).$$

Es folgt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u_\ell(x) & u_r(x) \\ u'_\ell(x) & u'_r(x) \end{pmatrix} = -\sqrt{L} \sinh(\sqrt{L}\ell) < 0.$$

Wir finden, dass

$$G_L(x, y) \geq 0. \quad (13.9)$$

Dann ist

$$u(x) = \int_0^\ell G_L(x, y) g(y) dy$$

die Lösung zu (13.8). Um nicht sehr viel schreiben zu müssen, definieren wir den Lösungsoperator

$$\mathcal{G}_L : C[0, \ell] \rightarrow \{u \in C^2[0, \ell]; u(0) = u(\ell) = 0\}$$

durch

$$(\mathcal{G}_L g)(x) = \int_0^\ell G_L(x, y) g(y) dy.$$

Man sieht direkt, dass folgendes gilt:

Hilfslemma 13.3.2 Sei $g \in C[0, \ell]$. Dann folgt aus $g \geq 0$ auf $[0, \ell]$, dass $\mathcal{G}_L g \geq 0$ auf $[0, \ell]$.

3. Im dritten Schritt betrachten wir das Iterationsverfahren:

$$\begin{cases} u_0 = v \\ u_{n+1} = \mathcal{G}_L(f^*(\cdot, u_n) + Lu_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (13.10)$$

Wir werden erst die folgende Behauptung zeigen.

Hilfslemma 13.3.3 Sei $w, v, u_n \in C[0, \ell]$. Dann folgt aus $w \leq u_n \leq v$ auf $[0, \ell]$, dass $w \leq u_{n+1} \leq v$ auf $[0, \ell]$.

Wegen Hilfslemma 13.3.2 und der Linearität hat der Operator \mathcal{G}_L auch die folgende Eigenschaft:

$$g_1 \leq g_2 \text{ auf } [0, \ell] \implies \mathcal{G}_L g_1 \leq \mathcal{G}_L g_2 \text{ auf } [0, \ell]. \quad (13.11)$$

Man findet wegen $u_n \leq v$ und der Annahme, dass v eine Oberlösung ist:

$$\begin{aligned} -u''_{n+1}(x) + Lu_{n+1}(x) &= f^*(x, u_n(x)) + Lu_n(x) \leq \\ &\leq f^*(x, v(x)) + Lv(x) \leq -v''(x) + Lv(x). \end{aligned}$$

Mit (13.11) folgt

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \mathcal{G}_L(f^*(\cdot, u_n) + Lu_n)(x) \leq \\ &\leq \mathcal{G}_L(f^*(\cdot, v) + Lv)(x) \leq \mathcal{G}_L(-v'' + Lv)(x). \end{aligned}$$

Diese letzte Formel kann man expliziter schreiben:

$$\mathcal{G}_L(-v'' + Lv)(x) = v(x) - \frac{v(0)}{u_r(0)} u_r(x) - \frac{v(\ell)}{u_\ell(\ell)} u_\ell(x) \quad (13.12)$$

Die rechte Seite von (13.12) löst nämlich genau das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + Lu(x) = -v''(x) + Lv(x) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0, \end{cases}$$

und diese Lösung ist eindeutig. Weil $v(0), u_r(0), v(\ell), u_\ell(\ell) > 0$ folgt

$$u_{n+1}(x) \leq v(x) - \frac{v(0)}{u_r(0)}u_r(x) - \frac{v(\ell)}{u_\ell(\ell)}u_\ell(x) \leq v(x) \text{ für } x \in [0, \ell].$$

Auf ähnliche Art folgt $u_{n+1}(x) \geq w(x)$ für $x \in [0, \ell]$.

Hilfslemma 13.3.4 Wenn u_n eine Oberlösung ist, dann ist auch u_{n+1} eine Oberlösung.

Es gilt für $x \in [0, \ell]$, dass

$$-u_{n+1}''(x) + Lu_{n+1}(x) = f^*(x, u_n(x)) + Lu_n(x) \leq -u_n''(x) + Lu_n(x).$$

Wie oben in Hilfslemma 13.3.3, in dem wir v ersetzen durch u_n , folgt

$$u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \text{ für } x \in [0, \ell]$$

und dann auch, dass

$$-u_{n+1}''(x) + Lu_{n+1}(x) = f^*(x, u_n(x)) + Lu_n(x) \geq f^*(x, u_{n+1}(x)) + Lu_{n+1}(x).$$

Weil auch die Randbedingungen erfüllt sind, ist u_{n+1} eine Oberlösung.

4. Als nächstes wird die Konvergenzfrage zu dieser Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beantwortet.

Hilfslemma 13.3.5 Die Folge $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ ist konvergent in $C[0, \ell]$.

Für jedes $x \in [0, \ell]$ ist $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$ eine fallende Folge in \mathbb{R} , die nach unten beschränkt wird durch $w(x)$. Dann ist

$$u_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

wohldefiniert.

Man schreibt $[w, v] = \{u \in [0, \ell]; w(x) \leq u(x) \leq v(x) \text{ für } x \in [0, \ell]\}$. Weil $u_n \in [w, v]$ ist die Folge $\{u_n\}$ gleichmäßig beschränkt. Für $u \in [w, v]$ ist $f(\cdot, u) + Lu \in C[0, \ell]$ gleichmäßig beschränkt, und weil $(x, y) \mapsto G_L(x, y)$ stetig ist, folgt, dass

$$x \mapsto \mathcal{G}_L(f(\cdot, u(\cdot)) + Lu(\cdot))(x)$$

gleichgradig stetig ist für $u \in [w, v]$. Insbesondere bedeutet das, dass $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist.

Wegen des Satzes von Arzela-Ascoli gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge u_{n_k} mit $u_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x)$ wobei u_∞ stetig ist.

5. Zuletzt zeigen wir noch, dass die Funktion u_∞ so ist, wie wir sie haben wollen.

Hilfslemma 13.3.6 u_∞ ist eine Lösung von (13.3).

Weil die Funktionen u_n geordnet sind,

$$v(x) \geq u_1(x) \geq \cdots \geq u_{n_k-1}(x) \geq u_{n_k}(x) \geq u_{n_k+1}(x) \geq \cdots \geq u_{n_{k+1}}(x) \geq \cdots \geq w(x),$$

folgt sogar, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt außerdem

$$\begin{aligned} u_\infty(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{G}_L f^*(\cdot, u_n(\cdot)) + Lu_n(\cdot))(x) = \\ &= \left(\mathcal{G}_L \lim_{n \rightarrow \infty} (f^*(\cdot, u_n(\cdot)) + Lu_n(\cdot)) \right) (x) = \mathcal{G}_L (f^*(\cdot, u_\infty(\cdot)) + Lu_\infty(\cdot))(x) \end{aligned}$$

und so gilt $u_\infty(0) = 0$, $u_\infty(\ell) = 0$ und $u_\infty \in C^2[0, \ell]$. Es folgt dann auch, dass

$$u_\infty''(x) + Lu_\infty(x) = f^*(x, u_\infty(x)) + Lu_\infty(x).$$

Weil weiter gilt, dass $w(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u_\infty(x) \leq v(x)$, findet man, dass

$$f^*(x, u_\infty(x)) = f(x, u_\infty(x)).$$

Das heißt, u_∞ ist sogar eine Lösung von (13.3). ■

Bemerkung 13.3.1 Man hätte auch $u_0 = w$ nehmen können in (13.10). Man würde dann eine wachsende Folge von Unterlösungen finden, die zu einer Lösung u_∞^* konvergieren würde. Man findet, dass $u_\infty^*(x) \leq u_\infty(x)$ für $x \in [0, \ell]$. Beide Lösungen sind nicht unbedingt identisch.

Bemerkung 13.3.2 Diese Methode ist viel allgemeiner anwendbar. Bei anderen Randbedingungen wie zum Beispiel

$$u(-1) = 5 \text{ und } u'(1) = 11$$

kann man auch so vorgehen. Es führt zu weit, hier eine genaue Beschreibung zu geben, welche Möglichkeiten erlaubt sind und welche Ungleichungsrichtung zu welcher Randbedingung für Ober- und Unterlösungen passen würde.

Beispiel 13.4 Betrachten wir

$$\begin{cases} -u''(x) = \cos x - (u(x))^2 \text{ für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0 \text{ und } u(1) = 0. \end{cases} \quad (13.13)$$

Die Funktion $v(x) = 1$ erfüllt

$$-v''(x) = 0 \geq \cos x - 1 \text{ und } v(-1) = v(1) = 1 \geq 0$$

und die Funktion $w(x) = 0$ erfüllt

$$-w''(x) = 0 \leq \cos x - 0 \text{ und } w(-1) = v(1) = 0 \leq 0.$$

Weil auch gilt, dass $w(x) \leq v(x)$, ist w eine Unterlösung unterhalb von v , und Theorem 13.3 liefert die Existenz einer Lösung des Randwertproblems.

Beispiel 13.5 Für

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 - (u(x))^2 \text{ für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0 \text{ und } u(1) = 0 \end{cases} \quad (13.14)$$

können wir nun auf drei Arten herangehen.

1. Man kann versuchen, (formal) eine Lösung zu berechnen:

$$\begin{aligned} -u''(x)u'(x) &= u'(x) - (u(x))^2 u'(x), \\ -\frac{1}{2}(u'(x))^2 + c &= u(x) - \frac{1}{3}u(x)^3, \\ \int_0^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{2c - 2u + \frac{2}{3}u^3}} &= \pm \int_{-1}^x dx. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$f_c(v) = \int_0^v \frac{du}{\sqrt{2c - 2u + \frac{2}{3}u^3}}.$$

Für $c \in (0, \frac{2}{3})$ existiert die Funktion $f_c : [0, u_c] \rightarrow \mathbb{R}$ bei dem u_c die erste positive Lösung von $2c - 2u_c + \frac{2}{3}u_c^3 = 0$ ist.

Für $c > \frac{2}{3}$ hat $2c - 2u_c + \frac{2}{3}u_c^3 = 0$ keine positive Nullstelle, und es existiert die Funktion $f_c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Skizzen zu diesen Funktionen f_c stehen rechts.

Die Funktionen f_c sind streng wachsend und invertierbar. Man kann zeigen, dass es ein $c_* \in (0, \frac{2}{3})$ gibt, mit $f_{c_*}(u_{c_*}) = 1$. In der Figur ist diese Funktion f_{c_*} in grün dargestellt. Man hat $\lim_{u \uparrow u_{c_*}} f'_{c_*}(u) = \infty$. Es folgt

$$\lim_{s \uparrow 1} (f_{c_*}^{\text{inverse}})'(s) = 0$$

und man kann die Funktion durch „Spiegelung“ fortsetzen. Für $x \in [-1, 0]$ findet man

$$f_{c_*}(u(x)) = 1 + x$$

und

$$u(x) = f_{c_*}^{\text{inverse}}(1 + x) \text{ für } x \in [-1, 0].$$

Die Spiegelung liefert

$$u(x) = f_{c_*}^{\text{inverse}}(1 - x) \text{ für } x \in [0, 1].$$

Die gefragte Lösung ist

$$u(x) = f_{c_*}^{\text{inverse}}(1 - |x|) \text{ für } x \in [-1, 1].$$

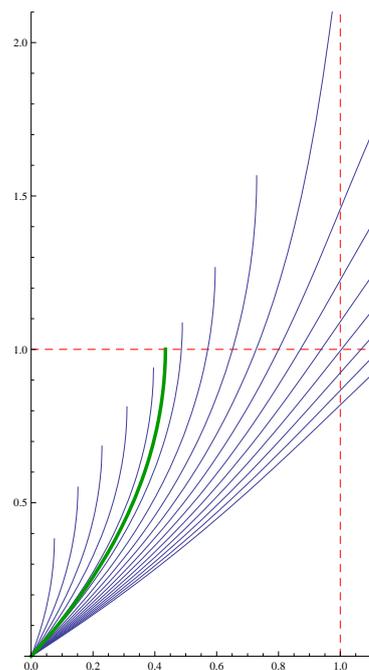
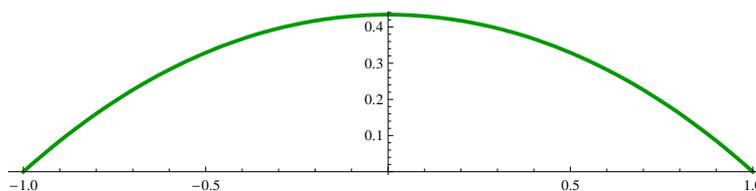


Abbildung 13.4: Die Lösung durch invertieren von f_{c_*} und symmetrisch fortsetzen.

2. Wenn man nur an der Existenz interessiert ist, geht es einfacher. Eine Oberlösung ist $v(x) = 1$ und eine Unterlösung ist $w(x) = 0$. Weil auch $w(x) \leq v(x)$ gilt, gibt es

eine Lösung. Man kann diese Lösung sogar approximieren indem man $u_0 = v$ setzt und man für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen u_{n+1} iterativ konstruiert aus

$$\begin{cases} -u_{n+1}''(x) + 2u_{n+1}(x) = 1 - (u_n(x))^2 + 2u_n(x) \\ u_{n+1}(-1) = 0 \text{ und } u_{n+1}(1) = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $u \mapsto 1 - u^2 + 2u$ ist wachsend auf $[0, 1]$.

3. Eine dritte Möglichkeit ist ein Schießverfahren zu definieren:

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 - (u(x))^2 \\ u(-1) = 0 \\ u'(-1) = s. \end{cases}$$

Weil man symmetrische Lösungen erwartet, kann man auch aus der Mitte schießen mit der Höhe als Parameter und die Ableitung gleich Null. Das bedeutet, man betrachtet das folgende Anfangswertproblem.

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 - (u(x))^2 \\ u(0) = h \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Man verwendet die Tatsache, dass wenn $x \mapsto u(x)$ eine Lösung ist, auch $x \mapsto u(-x)$ eine Lösung ist.

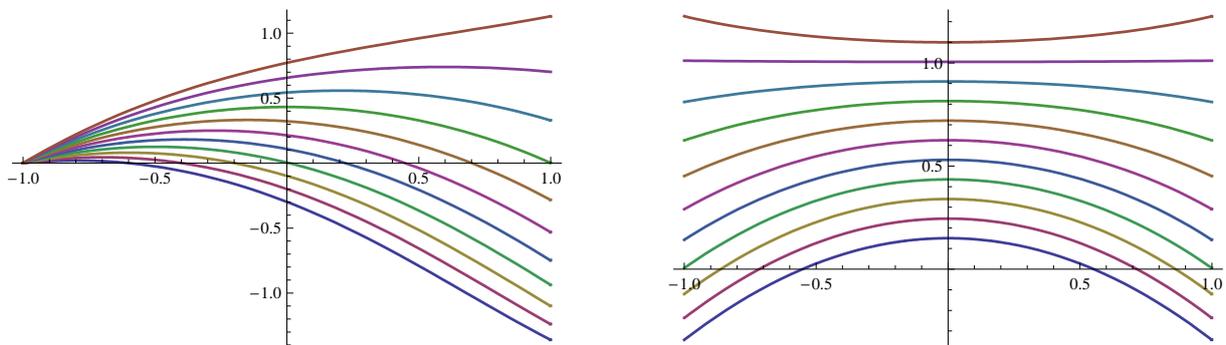


Abbildung 13.5: Links wird von -1 geschossen mit der Ableitung in -1 als Parameter. Rechts schießt man symmetrisch aus 0 mit der Höhe in 0 als Parameter. Auch hier ist die Lösung grün dargestellt.

Literaturverzeichnis

- [1] Robert L. Borrelli und Courtney S. Coleman, Differential equations. A modeling perspective. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
ISBN: 0-471-04230-7
- [2] Philip Hartman, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964. 2nd edition by SIAM.
ISBN: 0-89871-510-5
- [3] Harro Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 2006.
ISBN: 3-519-42227-1
- [4] James Hetao Liu, A first course in the qualitative theory of differential equations, Pearson Education, New Jersey, 2003.
ISBN: 0-13-008380-1
- [5] Wolfgang Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
ISBN: 3-540-56294-X