Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Inka Schnieders, M.Sc.

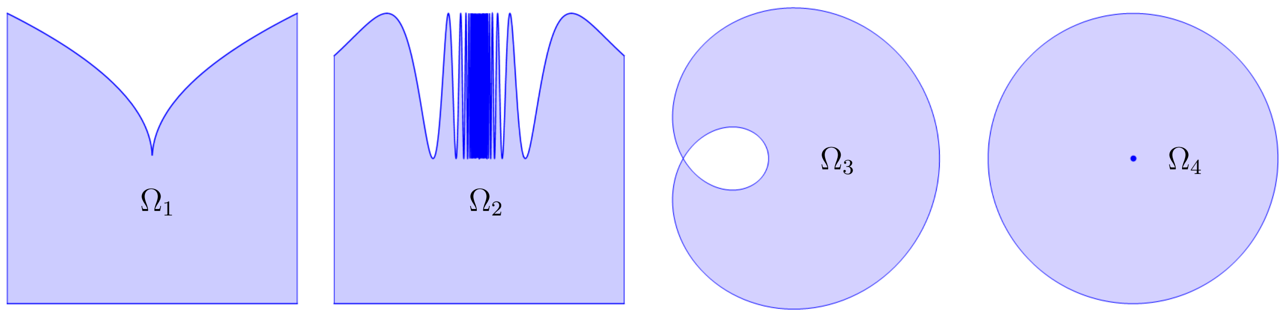
SoSe 2019

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt ist unbepunktet, muss nicht abgegeben werden und wird in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe 1: Entscheiden Sie bei den folgenden Mengen Ω_i jeweils, ob der Rand C^0- bzw. C^1-Regularität besitzt. Ω_i wird durch die gefärbte Fläche dargestellt und ist wie folgt definiert:



(a) $\Omega_1 = \left\{ (x,y) \ ; \ -1 < y < \sqrt{|x|} \text{ und } |x| < 1 \right\}$

(b) Ω_2 ist die größte offene Menge innerhalb $\left\{ (x,y) \ ; \ |x| < 1 \, , \ |y| < 1 \text{ und } y < \left(\sin \frac{1}{x}\right)^2 \right\}$

(c) Der Rand von Ω_3 ist durch $(x,y) = \big((2\cos t + 1)\cos t, (2\cos t + 1)\sin t\big)$ für $t \in [0, 2\pi)$ parametrisiert.

(d) $\Omega_4 = \{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \ ; \ 0 < r < 1 \text{ und } \varphi \in \mathbb{R} \}$

Aufgabe 2: Gegeben seien die folgenden Funktionen $u_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad u_1(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad u_2(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Es gilt $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Überlegen Sie, ob sich die Funktionen so fortsetzen lassen, dass die Fortsetzung in $C^1(\mathbb{R})$ oder $C^0(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3: Sei $\gamma \in (0,1)$ und seien $u, v \in C^{0,\gamma}([0,1];[0,1])$. Liegen die folgenden Funktion in $C^{0,\gamma}([0,1];\mathbb{R})$?

(a) $u + v$ (b) $u\,v$ (c) $u \circ v$

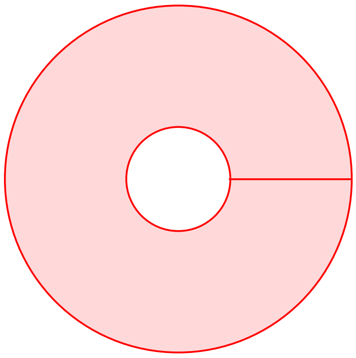
Aufgabe 4: Sei Ω ein beschränktes Gebiet.

(a) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\bar{\Omega}), C^{0,1}(\bar{\Omega}), C^{1,0}(\bar{\Omega})$ an.

(b) Geben sie alle Inklusionen zwischen den Mengen $C^0(\Omega), C^{0,1}(\Omega), C^{1,0}(\Omega), C_c^{1,0}(\Omega)$ an.

(c) In welcher wichtigen Eigenschaft unterscheiden sich $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1})$ und $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0})$?

Aufgabe 5: Überlegen Sie sich ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $u \in C^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, so dass u nicht zu einer Funktion in $C^0(\bar{\Omega})$ fortgesetzt werden kann.
Gibt es so eine Funktion auf $B_1(0)$? Wann kann man so eine Funktion nur finden?



Aufgabe 6: Sei $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Sei $v : Q \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar auf Q und $u : Q \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) Berechnen Sie $\vec{n}$ auf den 4 Seiten von ∂Q.

(b) Ergänzen Sie mittels partieller Integration:

$$\int_Q \vec{v} \cdot \nabla u \ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 v_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 v_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy \right) dx$$

$$= \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \int_{\partial Q} u \ \vec{v} \cdot \vec{n} \ d\sigma - \int_Q u \ \nabla \cdot \vec{v} \ dxdy$$

Aufgabe 7: Gegeben sei

$$\int_{x^2+y^2<1} \nabla \cdot \begin{pmatrix} x \cos(1 - x^2 - y^2) \\ 1 + x^2 \end{pmatrix} d(x, y).$$

(a) Berechnen Sie das Integral direkt.

(b) Berechnen Sie das Integral mit dem Satz von Gauß.

Aufgabe 8: Sei $X = \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \ ; \ x + y < 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_X e^{\frac{y}{x+y}} \ d(x, y).$$

Hinweis: $(u, v) = \left(x + y, \frac{y}{x+y} \right)$.