Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Inka Schnieders, M.Sc.

SoSe 2019

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 11.04.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1: Für welche $\alpha \in [0,1]$ sind die folgenden Funktionen in $C^{0,\alpha}([0,1])$?

(a) $f_1(x) = x^\beta$ mit $\beta \in [0,\infty)$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} -x\ln(x) & \text{für } x \in (0,1]\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$

Aufgabe 2: Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{0<x<y<1} \frac{x}{y}\; d(x,y)$

(b) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\le 1} (2x^2+y^2)\; d(x,y)$

Aufgabe 3: Eine Übung zu Polarkoordinaten:

(a) Zeigen Sie, dass für $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nur von $\|x\|$ abhängen, für die also ein $\tilde{f}$ mit $f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$ existiert, folgendes gilt:

$$\Delta f\,(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}\,(r) \;\text{ für } r = \|x\|\,.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**:** Im Skript findet man $v(x_1,x_2) = \dfrac{1-x_1^2-x_2^2}{(x_1-1)^2+x_2^2}$. Zeigen Sie, dass

$$u(x_1,x_2) := (x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1})\, v(x_1,x_2)$$

auch eine Lösung von dem folgenden Randwertproblem ist:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{für } x \in B_1(0)\,, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0) \setminus \{(1,0)\}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)**:** (a) Zu welcher Differentialgleichung wird

$$u_{xx} - u_{yy} = f,$$

wenn die Substitution $s = x - y$, $t = x + y$ durchgeführt wird?

(b) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(x, y) = g(x - y) + h(x + y) \tag{2}$$

eine Lösung liefert zu

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich jede zweimal stetig differenzierbare Lösung von (3) wie in (2) schreiben lässt.

Aufgabe 6 (2+2+4 Punkte)**:** Wir betrachten Transformationen beim Laplace-Operator.

(a) Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und definiere $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $T(x) = cx$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta \left(u \left(T \left(x \right) \right) \right) = c^2 \left(\Delta u \right) \left(T \left(x \right) \right) .$$

(b) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und definiere $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $T(x) = x + y$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta \left(u \left(T \left(x \right) \right) \right) = \left(\Delta u \right) \left(T \left(x \right) \right) .$$

(c) Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthonormale Abbildung, also $M^\top M = I$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta \left(u \left(Mx \right) \right) = \left(\Delta u \right) \left(Mx \right) .$$