Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

SoSe 2019

Partielle Differentialgleichungen

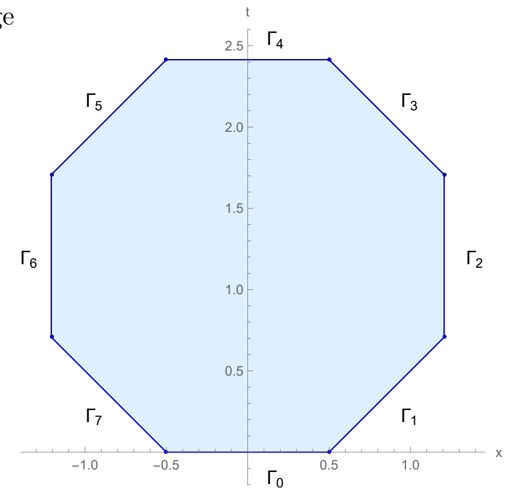
Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am **Mittwoch, den 19.06.2019, um 16 Uhr**.

Aufgabe 1. **(2+3 Punkte)** Die Funktion $u(x,t) = t$ ist die eindeutige $C^2(\overline{K})$-Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in K, \\ u(x,t) = t & \text{für } (x,t) \in A, \\ u_t(x,t) = 1 & \text{für } (x,t) \in B, \end{cases}$$

für K das nebenstehende regelmäßige Oktagon, bei der Γ_i für $i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ die 8 Geraden sind, deren Vereinigung den Rand ∂K bilden.



(a) Geben Sie die kleinstmöglichen Mengen A, B an mit $A = \bigcup_{i\in\{0,\dots.\}} \Gamma_i \supset B = \bigcup_{i\in\{0,\dots.\}} \Gamma_i$ und derart, dass diese Eindeutigkeit gilt.

(b) Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. **(2+3 Punkte)** Die Funktion $u(x,t) = t$ ist die eindeutige $C^2(\overline{K})$-Lösung von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 1 & \text{für } (x,t) \in K, \\ u(x,t) = t & \text{für } (x,t) \in C, \end{cases}$$

für K und Γ_i wie in der letzten Aufgabe.

(a) Geben Sie die kleinstmögliche Menge $C = \bigcup_{i\in\{0,\dots.\}} \Gamma_i$ an derart, dass diese Eindeutigkeit gilt.

(b) Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktion

$$u(x,t) = \frac{x}{t\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right) u(x,t) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Ist diese Funktion ein Gegenbeispiel für die Eindeutigkeit bei der Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension?

(d) Berechnen Sie $\lim_{t\downarrow 0} F_{u(\cdot,t)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4. **(2+2+2+1+1+2+0 Punkte)** Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand betrachten wir Lösungen u von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass für diese Lösungen die nullten, ersten und zweiten Ableitungen existieren auf $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ und da stetig und gleichmäßig beschränkt sind.

(a) Vereinfachen Sie $E'(t)$ und $E''(t)$ für

$$E(t) = \int_\Omega u(x,t)^2\, dx$$

so, dass nur quadratische Termen dastehen.

(b) Zeigen Sie, dass $E'(t) \le 0$ und $E''(t) \ge 0$.

Dann ist $t \mapsto E(t)$ monoton fallend und $t \mapsto E'(t)$ monoton steigend.

(c) Begründen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} E'(t) = 0$.

(d) Begründen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} |\nabla u(x,t)| = 0$.

(e) Zeigen Sie, dass $M'(t) = 0$ für

$$M(t) = \int_\Omega u(x,t)\, dx.$$

(f) Begründen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = c$ und berechnen Sie c in Abhängigkeit von u_0.

(g) Können Sie eine physikalische Erklärung zu dem Ergebnis geben?

Aufgabe 5. Wir betrachten Lösungen $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = x(2-x) & \text{für } x \in (0,1), \\ u(0,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}^+, \\ u_x(1,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

(a) Sei $f(x,t) \ge 0$ für $(x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$.
Zeigen Sie, dass dann auch $u(x,t) \ge 0$ für alle $(x,t) \in (0,1] \times (0,\infty)$.

(b) Sei $f(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$.
Berechnen Sie dann die Stelle $(x_0,t_0) \in [0,1] \times [0,\infty)$, für die gilt

$$u(x_0,t_0) = \sup_{(x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)} u(x,t).$$

(c) Sei $f(x,t) = 2$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$.
Begründen Sie, dass in dem Fall $u(x,t) = x(2-x)$ die eindeutige Lösung ist.

(d) Sei $0 \le f(x,t) < 2$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$.
Berechnen Sie auch dann die Stelle $(x_0,t_0) \in [0,1] \times [0,\infty)$, für die gilt

$$u(x_0,t_0) = \sup_{(x,t)\in(0,1)\times(0,\infty)} u(x,t).$$