Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2019**
Inka Schnieders, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 12 (Das letzte Übungsblatt)

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den **04.07.2019**, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Wir betrachten

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{für } x \in D := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}, \\ u(x) = P(x) & \text{für } x \in \partial D, \end{cases} \tag{1}$$

mit P ein Polynom in (x_1, x_2).

(a) Zeigen Sie, dass wenn der Grad von P kleiner oder gleich 1 ist, dann ist $u(x) = P(x)$ auch die Lösung von (1).

(b) Zeigen Sie, dass für $P(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ die Funktion

$$u(x) = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) + bx_1x_2$$

die Lösung von (1) ist.

(c) Finden Sie eine ähnliche Lösungsformel für Polynome dritten Grades.

Aufgabe 2. Aus der Fouriertheorie folgt, dass man jede 2π-periodische Funktion $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ schreiben kann als Fourierreihe:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

und derart, dass diese Reihe in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ konvergiert. Hier bedeutet $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, dass $f_{|[0,2\pi]} \in L^2(0, \pi)$. Für das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{für } x \in D := \left\{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}, \\ u(x) = \Psi(x) & \text{für } x \in \partial D, \end{cases}$$

kann man dies verwenden für

$$\Psi(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right)^k \tag{2}$$

mit $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{Z}}$, was bedeutet, dass $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} |c_k|^2 < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass Ψ eine reelle Funktion ist, genau wenn $c_{-k} = \overline{c_k}$.

(b) Sei Ψ wie in (2). Zeigen Sie, dass $u : \bar{D} \to \mathbb{C}$ durch

$$u\left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} \left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^k \tag{3}$$

wohldefiniert ist in $L^2(D)$.

(c) Zeigen Sie, dass für u in (3) innerhalb D jede Ableitung existiert.

(d) Zeigen Sie, dass für u in (3) gilt $-\Delta u(x) = 0$ für $|x| < 1$.

Aufgabe 3. (2+2+2+2+2 Punkte) Die radialsymmetrischen Lösungen von $\Delta^2 u(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind für $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{2,4\}$ wie folgt

$$u(x) = c_1 |x|^{4-n} + c_2 |x|^{2-n} + c_3 |x|^2 + c_4.$$

(a) Beweisen Sie diese Behauptung.

(b) Berechnen Sie $\lim_{n\to 2} \frac{|x|^{2-n}-1}{2-n} = \lim_{n\to 4} \frac{|x|^{4-n}-1}{4-n}$ und $\lim_{n\to 2} \frac{|x|^{4-n}-|x|^2}{2-n}$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(c) Geben Sie alle radialsymmetrischen Lösungen von $\Delta^2 u(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ im Fall an, dass $n = 2$ und $n = 4$.

(d) Wieso bekommt man mit $u(x) = c_2 |x|^{2-n} + c_3 |x|^2 + c_4$ keine Fundamentallösung bei Δ^2? Für eine Fundamentallösung f_n bei Δ^2 gilt im Sinne von Distributionen $\Delta^2 f_n = \delta_0$.

(e) Begründen Sie, dass für $n \notin \{2,4\}$ und eine geschickt gewählte Konstante $c_n \in \mathbb{R}$ im Sinne von Distributionen gilt:

$$\Delta^2 \left(c_n |x|^{4-n} \right) = \delta_0(x).$$

Genauer wäre zu sagen, dass für $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} c_n |x|^{4-n} \varphi(x)\, dx \text{ für } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

gilt:

$$F\left(\Delta^2 \varphi\right) = \varphi(0) \text{ für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Aufgabe 4. In zwei Dimensionen gilt für jede Funktion $h \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$ mit $\Delta h(x) = 0$, dass es eine analytische Funktion $\mathbf{h} \in C^\infty(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ gibt mit

$$h(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\left(\mathbf{h}(x_1 + i x_2)\right).$$

(a) Nehmen wir mal an, dass man $z = x_1 + i x_2$ und $\bar{z} = x_1 - i x_2$ als unabhängige Variablen verwenden kann. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} h\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = \frac{1}{4} (\Delta h) \left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

(b) Formal folgt so aus $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} w(z, \bar{z}) = 0$, dass $w(z, \bar{z}) = f_1(z) + f_2(\bar{z})$. Zeigen Sie dies.

(c) Ebenso folgt aus $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} w(z, \bar{z}) = 0$, dass $w(z, \bar{z}) = f_1(z) + f_2(\bar{z}) + z\bar{z}\left(f_3(z) + f_4(\bar{z})\right)$. Zeigen Sie auch dies.

Aufgabe 5. (2+2+0 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass für $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta h_1 = \Delta h_2 = 0$ gilt, dass

$$\Delta^2 \left(h_1(x) + |x|^2 h_2(x) \right) = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2$ gilt, dass $\Delta^2 f(x_1, x_2) = 0$ und, dass man h_1, h_2 wie oben finden kann mit

$$f(x) = h_1(x) + |x|^2 h_2(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Geht ähnliches für $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2$ in $\mathbb{R}^3$?