Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Inka Schnieders, M.Sc.

SoSe 2019

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 18.04.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**:** Schreiben Sie für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ die folgende Ausdrücke mit Hilfe von u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} und u_{yy}.

(a) $(x\partial_x + y\partial_y)\,(\partial_y - \partial_x)\,u(x,y)$

(b) $(\partial_y - \partial_x)\,(x\partial_x + y\partial_y)\,u(x,y)$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**:** Wir betrachten die stetigen Funktionen $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, die auf $(0,1)$ durch

$$f_1(x) = \left|x - \tfrac{1}{2}\right| \qquad f_2(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_3(x) = \frac{x(1-x)}{\ln x}$$

definiert sind. Für welche f_i gilt, dass

(a) $f_i \in C^1[0,1]$?

(b) $f_i \in C^{0,1}[0,1]$?

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktionenfolgen

- $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = e^{-n|x|}$ und
- $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) = e^{-|x-n|}$.

Prüfen Sie jeweils:

(a) Ist diese Familie gleichmäßig beschränkt?

(b) Ist diese Familie gleichgradig stetig?

(c) Gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge?

Aufgabe 4: Sei $L > 0$ gegeben.

$$\mathcal{F}_L := \{\, f : [0,1] \to \mathbb{R}^n \ ;\ f \text{ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante } L \,\}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{F}_L$ ist gleichmäßig beschränkt.

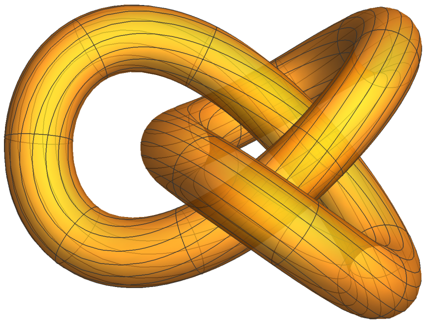
(b) $\mathcal{F}_L$ ist gleichgradig stetig.

Aufgabe 5: Sei Ω ein beschränktes Gebiet und $0 < \alpha \leq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $0 < \beta < \alpha$ gilt: $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$.

(b) Sei $\{u_n\} \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ in der dazugehörigen Norm beschränkt. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass es eine geeignete Teilfolge von $\{u_n\}$ gibt, die in $C^0(\bar{\Omega})$ konvergiert.

Aufgabe 6: Der Trefoil-Knoten lässt sich durch die Kurve $\Phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ beschreiben:



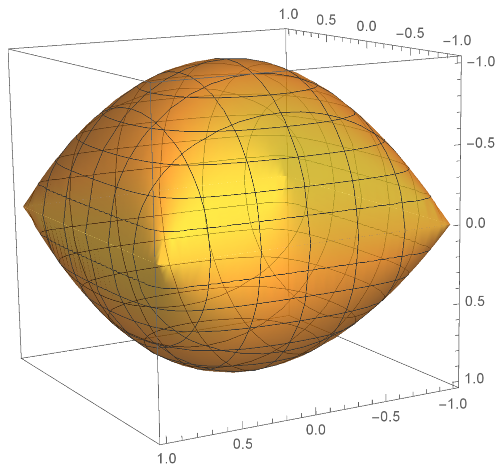
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) + 2\sin(2t) \\ \cos(t) - 2\cos(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Länge ℓ der Kurve.

(b) Für $\varepsilon > 0$ sei

$$\Omega(\varepsilon) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \exists\, t \in [0, 2\pi] \text{ mit } |(x, y, z) - \Phi(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Denken Sie, dass für das Volumen $\mathrm{Vol}(\Omega(\varepsilon)) = \pi\varepsilon^2\ell$ gilt?



Aufgabe 7 (3+2+2+3 Punkte)**:** Das Kissen K ist definiert durch

$$K := \left\{(x, y, z) \in [-1, 1]^3; z^2 < (1 - x^2)(1 - y^2)\right\}.$$

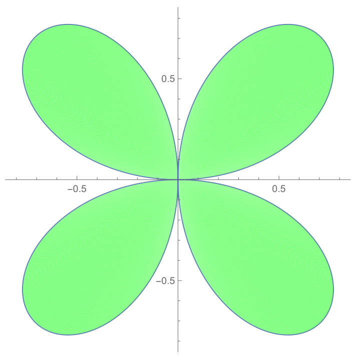
(a) Berechnen Sie den Inhalt.

(b) Geben Sie ein Integral an, mit dem man den Flächeninhalt berechnen kann.

(c) Welches Randwertproblem löst $u\,(x, y, z) = z^2 - (1 - x^2)\,(1 - y^2)$? Ergänzen Sie:

$$\begin{cases} -\Delta u = \ \ldots\ldots. & \text{in } K, \\ u = \ \ldots\ldots. & \text{auf } \partial K. \end{cases}$$

(d) Für welche $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in [0, 1]$ gilt $\partial K \in C^{k,\gamma}$?



Aufgabe 8: Das vierblättrige Kleeblatt wird durch

$$\Omega = \left\{ r\sin(2\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \ ; r \in [0, 1] \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

beschrieben. Bestimmen Sie den Flächeninhalt von Ω.