Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2019**
Inka Schnieders, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 25.04.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. Sei $u, f \in C^0[-1,1]$ und derart, dass

$$\int_{-1}^{1} \left(u(x)\varphi'(x) + f(x)\varphi(x)\right) dx = 0 \tag{1}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} \left(u(x) - \int_{-1}^{x} f(s)\,ds\right) \varphi'(x)\,dx = 0 \tag{2}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$.

(b) Sei $\varphi_0 \in C_c^\infty(-1,1)$ derart, dass $\int_{-1}^1 \varphi_0(x)\,dx = 1$. Zeigen Sie, dass für jedes $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$ die Funktion $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi(x) = \int_{-1}^{x} \left(\varphi(s) - \left(\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt\right)\varphi_0(s)\right) ds, \tag{3}$$

auch in $C_c^\infty(-1,1)$ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass wenn Sie dieses ψ aus (3) einsetzen in (2) für φ, dann folgt

$$\int_{-1}^{1} \left(u(x) - \int_{-1}^{x} f(s)\,ds - c\right) \varphi(x)\,dx = 0$$

mit $c = \int_{-1}^1 \left(u(x) - \int_{-1}^x f(s)\,ds\right)\varphi_0(x)\,dx$.

(d) Begründen Sie, dass
   i. $u(x) = \int_{-1}^x f(s)\,ds + c$,
   ii. $u \in C^1[-1,1]$, und
   iii. u eine klassische Lösung von $u'(x) = f(x)$ ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Die schwache Formulierung der Differentialgleichung $u''''(x) = f(x)$ wird gegeben durch:

$$\int_{\mathbb{R}} u''(x)\varphi''(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Hier ist $u \in C^1(\mathbb{R})$ eine fast überall zweimal differenzierbare Funktion und ihre zweite Ableitung ist lokal integrierbar.

(a) Nehmen wir an, f ist stetig. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung der Differentialgleichung auch eine schwache Lösung ist.

(b) Berechnen Sie eine Lösung für $f(x) = e^{-|x|}$.

(c) Geben Sie auch alle klassischen Lösungen an für $f(x) = e^{-|x|}$.

(d) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $f(x) = \operatorname{sign}(x)$.

(e) Gibt es eine schwache Lösung für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$?

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wenn $u \in C^2\left(\bar{\Omega}\right) \cap C_0^0\left(\overline{\Omega}\right)$ die folgende Gleichung erfüllt,

$$\int_\Omega e^{-|x|^2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \ dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx$$

für alle $v \in C_c^\infty(\Omega)$, von welchem Randwertproblem ist u dann eine Lösung?

Aufgabe 4. (3+3 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_{xy}(x,y) = 0 \text{ für } (x,y) \in [0,1]^2$$

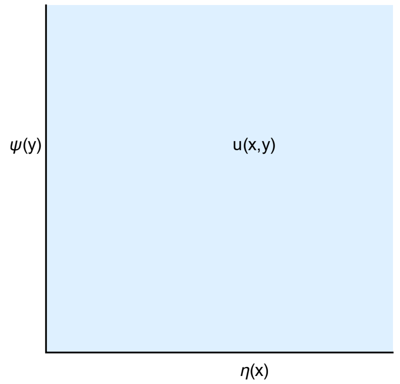
mit Randbedingungen

$$u(x,0) = \eta(x) \ \text{ für } x \in [0,1]$$

und

$$u(0,y) = \psi(y) \ \text{ für } y \in [0,1],$$

wobei $\eta, \psi \in C^2[0,1]$ gegeben sind und $\eta(0) = \psi(0)$ gilt.



(a) Geben Sie eine Lösungsformel an für u.

(b) Für $\eta, \psi \in C^1[0,1] \setminus C^2[0,1]$ gibt es keine Lösung u in $C^2([0,1]^2)$. Es gibt jedoch in dem Fall noch eine schwache Lösung. Definieren Sie eine passende Formulierung einer solchen Lösung.

Aufgabe 5. Wir betrachten die folgende Integralgleichung für $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$:

$$\int_{-1}^{1} \left(x\ u(x) \ \ \varphi''(x) + 2u(x) \ \ \varphi'(x) + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \varphi(x) \right) dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$.

(a) Welche Differentialgleichung erfüllt eine solche Funktion u außerhalb von 0? *Hinweis: es gilt, dass eine Lösung u, außer in 0, zweimal stetig differenzierbar ist.*

(b) Berechnen Sie eine stetige Funktion $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die diese Integralgleichung erfüllt für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$.

(c) Ist diese Funktion u eine klassische Lösung der Differentialgleichung in (a)?

(d) Erfüllt diese Funktion u die Integralgleichung

$$\int_{-1}^{1} \left(-x\ u'(x) \ \ \varphi'(x) - u'(x) \ \ \varphi(x) + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \varphi(x) \right) dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$?