Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **SoSe 2019**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 02.05.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. (14 Punkte) Sei $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ und } x^2+y^2<1\right\}$. Wir betrachten die Funktionen $u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

i. $u_1(x,y) = x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)$ und $f_1(x,y) = -\Delta u_1(x,y)$;

ii. $u_2(x,y) = \left(x^2-y^2\right)\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)$ und $f_2(x,y) = -\Delta u_2(x,y) = 4\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

Für sowohl $u = u_1$ als auch $u = u_2$:

(a) berechnen Sie $\nabla u(x,y)$ für $(x,y) \in \Omega$;

(b) berechnen Sie $f_1(x,y)$ bzw. $f_2(x,y)$ für $(x,y) \in \Omega$;

(c) berechnen Sie $u(x,y)$ für $(x,y) \in \partial\Omega$ wo möglich;

(d) begründen oder widerlegen Sie, dass $u \in L^2(\Omega)$ gilt;

(e) begründen oder widerlegen Sie, dass $u \in C(\Omega)$ gilt;

(f) begründen oder widerlegen Sie, dass $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt;

(g) begründen oder widerlegen Sie, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $T \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) - \Delta_x T(x,t) + (T(x,t))^3 = 0 & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x,0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega \end{cases}$$

und betrachten Sie $E(t) = \int_\Omega T(x,t)^2 dx$.

(a) Zeigen Sie, dass $\int_\Omega T(x,t)T_t(x,t)\,dx \leq -\int |\nabla_x T(x,t)|^2\,dx$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $E(t) \leq E(0)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $E_\infty := \lim_{t\to\infty} E(t)$ existiert.

(d) Zeigen Sie, dass falls $T_\infty \in L^2(\Omega)$ mit $\lim_{t\to\infty} \|T_\infty - T(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ existiert, dann $T_\infty = 0$ gilt.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Für Polarkoordinaten (r,φ) gilt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Nehmen Sie an, dass für $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$U(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass für differenzierbare Funktionen U und u gilt:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \text{ für } r > 0 \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

(b) Wenn U durch $U(r,\varphi) = r\sin(2\varphi)$ definiert ist und (1) gilt, ist dann u differenzierbar?

(c) Wenn u eine stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^2$ ist und (1) gilt, ist dann auch $\frac{\partial}{\partial\varphi}U$ stetig?

Aufgabe 4. Die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche ist

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u\,(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla u\,(x,y)|^2}} \right) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für radialsymmetrische Funktionen zur folgenden Gleichung wird:

$$\partial_r \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r\,(r)|^2}} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{U_r(r)}{\sqrt{1 + |U_r\,(r)|^2}} \right) = 0.$$

(b) Sei $h > 0$. Berechnen Sie wenn möglich eine radialsymmetrische Lösung für

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla u(x,y)|^2}} \right) = 0 & \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u\,(x,y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 = 1, \\ u\,(x,y) = h & \text{für } x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

(c) Welchen Wert darf h maximal annehmen, damit eine radialsymmetrische Lösung $(x,y) \mapsto u\,(x,y)$ existiert?