Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2019**
Inka Schnieders, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 09.05.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. (2+2+2+4+1+1+0 Punkte) Eine musikalische Aufgabe mit Harfe und Mundharfe.

- Für das Schwingen einer Saite bei der Harfe findet man

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{für } (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{für } (x,t) \in \{0,\pi\} \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Hier hat man nicht-triviale Lösungen der Form:

$$u(x,t) = \sin(ckt)\, S_k(x) \text{ mit } k \in \mathbb{N}^+.$$

(a) Zeigen Sie, dass S_k für irgendein $\lambda_k \in \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung ist von

$$\begin{cases} \lambda_k S_k(x) + S_k''(x) = 0 & \text{für } x \in (0,\pi), \\ S_k(0) = S_k(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass es für (1) nur die folgenden nicht-trivialen Lösungen gibt:

$$\lambda_k = k^2 \text{ mit } k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } S_k(x) = a \sin(kx).$$

Bei $\sin(ckt)$ hört man Schwingungen mit Frequenz $\frac{ck}{2\pi}$. Der Grundton hat die niedrigste Frequenz: $\frac{c}{2\pi}$. Die größeren Frequenzen gehören zu den Obertönen. Wir empfinden Kombinationen aus Grund- und Oberton als harmonisch, wenn die Frequenz vom Oberton ein ganzzahlig Vielfaches von der des Grundtons ist. Hier eine Hörprobe.

- Für die Mundharfe hat man

$$\begin{cases} u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0 & \text{für } (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}^+, \\ u = u_x = 0 & \text{für } (x,t) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+, \\ u_{xx} = u_{xxx} = 0 & \text{für } (x,t) \in \{\pi\} \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{2}$$

und findet nicht-triviale Lösungen der Form:

$$u(x,t) = \sin(c\nu_k t)\, U_k(x) \text{ mit } k \in \mathbb{N}^+.$$

(c) Zeigen Sie, dass U_k für irgendein $\nu_k \in \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung ist von

$$\begin{cases} \nu_k^2 U_k(x) - U_k''''(x) = 0 & \text{für } x \in (0,\pi), \\ U_k(0) = U_k'(0) = 0, \\ U_k''(\pi) = U_k'''(\pi) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

(d) Zeigen Sie, dass es für (3) nur die folgenden nicht-trivialen Lösungen gibt:

$$\nu_k = \mu_k^2 \text{ mit } \mu_k \text{ die } k\text{-te positive Nullstelle von } f(\mu) = \cos(\mu\pi) + \frac{1}{\cosh(\mu\pi)}, \tag{4}$$

$$U_k(x) = a\left(\cosh(\mu_k x) - \cos(\mu_k x) - \frac{\cosh(\mu_k\pi) + \cos(\mu_k\pi)}{\sinh(\mu_k\pi) + \sin(\mu_k\pi)}\left(\sinh(\mu_k x) - \sin(\mu_k x)\right)\right).$$

Hinweis 1: Begründen Sie, wieso man die Lösungen von

$$\begin{cases} \mu^4 U(x) - U''''(x) = 0 & \text{für } x \in (0,\pi), \\ U(0) = U'(0) = 0, \end{cases}$$

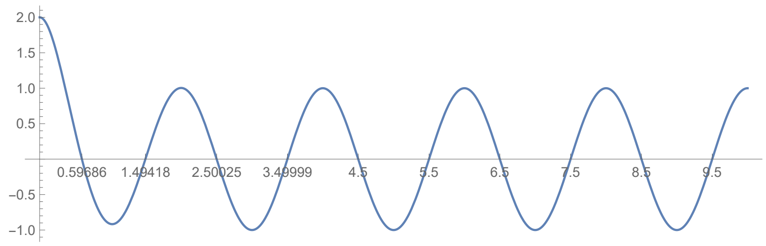
schreiben kann als

$$U(x) = a\left(\cosh(\mu x) - \cos(\mu x)\right) + b\left(\sinh(\mu x) - \sin(\mu x)\right).$$

Hinweis 2: Aus $U''(\pi) = 0$ folgt, wie b von a abhängt.
Hinweis 3: Für solche b gilt

$$U'''(\pi) = -2a\mu^3 \frac{\cos(\mu\pi)\cosh(\mu\pi) + 1}{\sinh(\mu\pi) + \sin(\mu\pi)}.$$

Hinweis 4: Eine Skizze der Funktion f aus (4) mit Approximationen der Nullstellen in 5 Dezimalen:



(e) Die positiven Nullstellen μ_k von f sind fast Nullstellen von $\mu \mapsto \cos(\mu\pi)$. Wieso?

(f) Geben Sie eine Schätzung für den Quotienten der beiden niedrigsten Frequenzen. Auch hier eine Hörprobe von Grund- und Obertönen bei der Mundharfe.

(g) Bevorzugen Sie Harfe oder Mundharfe?

Aufgabe 2. **(4 Punkte)** Finden Sie eine Formel für die Lösung $(x_1, x_2) \mapsto u(x_1, x_2)$ des folgenden Problems:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x_1, x_2) = \sin(x_2) & \text{für } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ u(s, -s) = 0 & \text{für } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 3. **(1+2+1 Punkte)** Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\vec{x} \cdot \nabla u(\vec{x}) = x_1$$

(a) Zeigen Sie, dass $u(\vec{x}) = x_1 + c$ für $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist.

(b) Berechnen Sie eine Lösung von $\vec{x} \cdot \nabla u(\vec{x}) = x_1$ auf einer Umgebung von $|\vec{x}| = 1$, für die gilt

$$u(\vec{x}) = 0 \text{ für } |\vec{x}| = 1.$$

(c) Geben Sie das maximale Definitionsgebiet dieser Lösung an.

Aufgabe 4. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 1 - x_2 \end{pmatrix},$$

und das Randwertproblem

$$\begin{cases} \vec{v}(x_1, x_2) \cdot \nabla u(x_1, x_2) = x_2 + u(x_1, x_2), \\ u(x_1, 0) = \sin(x_1). \end{cases} \tag{5}$$

(a) Geben Sie die Nullklinen vom Vektorfeld an.

(b) Geben Sie ein parameterabhängiges, gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen an, mit dessen Lösungen man Lösungen für (5) schreiben kann.

(c) Auf welchem Gebiet sind diese Lösungen für (5) definiert?