Prof. Dr. Guido Sweers **SoSe 2019**
Inka Schnieders, M.Sc.

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 16.05.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. **(2+2 Punkte)** Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, u) = 2x_1 - x_2 - u.$$

(a) Berechnen Sie eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \\ u(s,s) = \sin(s) & \text{für } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Wieso gibt es nur eine solche Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

Aufgabe 2. **(2+0+2 Punkte)** Sei $\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 4 - x_2 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, u) = x_1 - x_2 u.$$

(a) Begründen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \\ u(s,0) = \sin(s) & \text{für } s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

genau eine Lösung in $C^1(\mathbb{R} \times [0,4))$ hat.

(b) Wieso existiert die Lösung sogar auf $\mathbb{R} \times (-\infty, 4)$?

(c) Unter der Annahme, dass $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,4])$ gilt, kann man $u(x_1, 4)$ berechnen. Berechnen Sie $u(x_1, 4)$. *Hinweis: berechnen Sie erst $u(0, x_2)$ für $x_2 \in [0,4]$.*

Aufgabe 3. **(2+2+2+2+2+2 Punkte)** Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u(x) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x) = 1 & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \\ u(s,0) = 1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} & \text{für } s \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Ergänzen Sie

$$\begin{cases} X_1'(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{mit} \quad X_1(0) = \ldots\ldots\ldots, \\ X_2'(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{mit} \quad X_2(0) = \ldots\ldots\ldots, \\ U'(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{mit} \quad U(0) = \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

derart, dass $u(X_1(t), X_2(t)) = U(t)$ eine Lösung von (1) in Parameterform liefert.

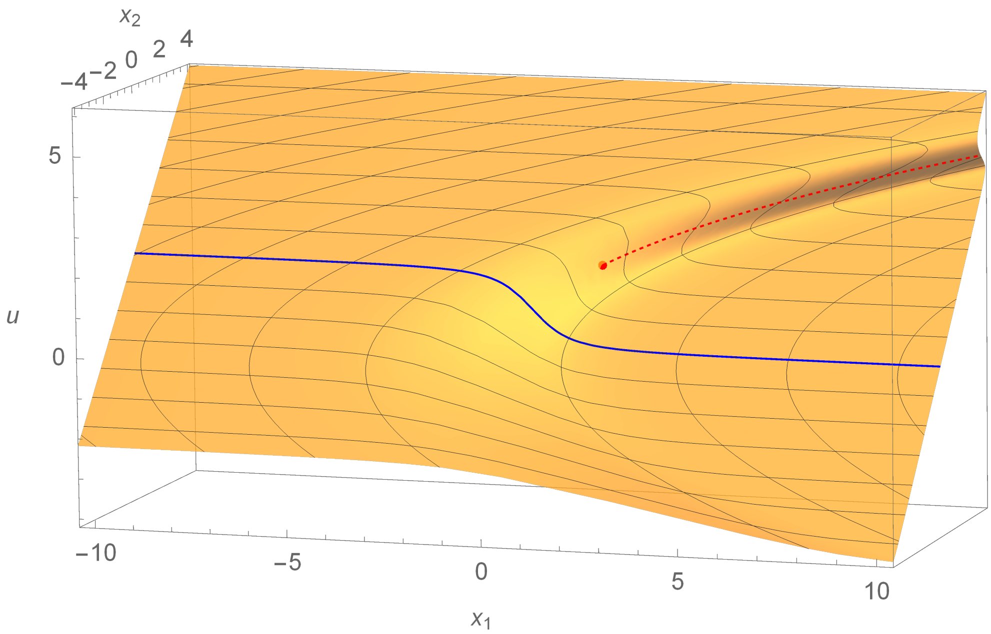
(b) Es gibt $a > 0$ derart, dass man für $x \in \mathbb{R} \times (-\infty, a)$ durch $u(X_1(t), X_2(t)) = U(t)$ eine eindeutige C^1-Lösung von (1) findet. Berechnen Sie das maximale a.

(c) Begründen Sie, dass die Aussage in b) auch stimmt.

(d) Eine Skizze der Lösung in Parameterform steht unten. Erklären Sie, wieso bei der roten gestrichelten Kurve die Parameterform so keine echte Lösung gibt.

(e) Welche Koordinaten hat der rote Punkt?

(f) Wie findet man in der Nähe der roten gestrichelten Kurve eine physikalisch vernünftige Lösung?



Aufgabe 4. Wir betrachten

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x - 2y\ u(x,y) \\ y + 2x\ u(x,y) \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x,y) = -\frac{1}{2} u(x,y)\,, \\ \qquad u(x,y) = \frac{1}{2} y \quad \text{für } x^2+y^2=1, \end{cases}$$

und sind interessiert an einer Lösung auf $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2>1\right\}$.

(a) Verwenden Sie Polarkoordinaten, um eine Lösung in Parameterform zu berechnen.

(b) Berechnen Sie $R > 0$ derart, dass die Lösung $u(x,y)$ für alle (x,y) mit

$$1 \le x^2+y^2 \le R^2$$

eindeutig durch die Parameterform definiert ist.

(c) Definieren Sie eine Integrallösung.

(d) Geben Sie eine DGl für die Trennkurve bei einer Stoßwelle wie Rankine-Hugoniot an.

(e) Berechnen Sie die Trennkurve.