Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

SoSe 2019

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 23.05.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. **(6 Punkte)** Sei $Q(\xi,\eta)$ mit $\xi,\eta \in \mathbb{R}$ das Symbol eines Differentialoperators L von rein zweiter Ordnung in 2 Dimensionen mit konstanten Koeffizienten, also

$$L := Q\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 2\beta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

❶ Es gibt $c > 0$ derart, dass

$$\begin{aligned} \text{entweder } & Q(\xi,\eta) \geq c\left(\xi^2+\eta^2\right) \text{ für alle } \xi,\eta \in \mathbb{R}, \\ \text{oder } & Q(\xi,\eta) \leq -c\left(\xi^2+\eta^2\right) \text{ für alle } \xi,\eta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

❷ Die beiden Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ haben das gleiche Vorzeichen.

❸ Das Polynom $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$ hat zwei Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(b) Angenommen L erfüllt die drei Bedingungen. Ist L hyperbolisch, elliptisch, parabolisch oder sonstiges, oder ist diese Klassifizierung so noch nicht festgelegt?

Aufgabe 2. **(2 Punkte)** Sei Q wie in Aufgabe 1.
Ist die folgende Bedingung äquivalent zu denen in Aufgabe 1(a)?

❹ Es gibt $c > 0$ derart, dass

$$|Q(\xi,\eta)| \geq c\left(\xi^2+\eta^2\right) \text{ für alle } \xi,\eta \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. Sei $Q(\xi)$ mit $\xi \in \mathbb{R}^n$ das Symbol eines Differentialoperators L von rein zweiter Ordnung in n Dimensionen mit konstanten Koeffizienten, also

$$L := Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ und wir dürfen annehmen, dass $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

(a) Wieso darf man annehmen, dass $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$?

(b) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

① Es gibt $c > 0$ derart, dass

$$\begin{aligned} \text{entweder } & Q(\xi) \geq c\,|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \text{oder } & Q(\xi) \leq -c\,|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

② Die n Eigenwerte der folgenden Matrix haben das gleiche Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

③ Für jedes unabhängige Paar $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ hat das Polynom $P(t) := Q(\xi + t\eta)$ zwei Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Hinweis: Symmetrische reelle Matrizen sind orthonormal diagonalisierbar. Solche $n \times n$-Matrizen haben also n unabhängige paarweise orthonormale Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten.

Aufgabe 4. (8+4 Punkte) Für $a \in \mathbb{R}$ und Funktionen $(x, y) \mapsto u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ definieren wir den Differentialoperator L_a durch

$$L_a u = u_{xx} + 2a u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2a^2 u_y.$$

(a) Für welches a ist L_a hyperbolisch, elliptisch, beziehungsweise parabolisch?

(b) Geben Sie für ein von Ihnen gewähltes a die Form einer allgemeinen Lösung von $L_a u = 0$ an.

Aufgabe 5. Geben Sie Lösungen in der Form

$$c_1 u_1 (x + \tau_1 y) + c_2 u_2 (x + \tau_2 y) \tag{1}$$

mit $c_i, \tau_i \in \mathbb{C}$ an für:

(a) $u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} = 0$;

(b) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$;

(c) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0$.

(d) In welchen dieser Fälle und wie, kann man so nicht-triviale, reelle Lösungen finden?

(e) Kann man Lösungen des Typs in (1) für $u_{xx} + u_{xy} + u_y = 0$ finden?

Aufgabe 6. Bestimmen Sie, auf welchen Teilgebieten von $\mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung

$$\left(1 - x^2\right) u_{xx} + 2xy u_{xy} + \left(1 - y^2\right) u_{yy} = f$$

hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist.

Aufgabe 7. Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$\left(1 - u_x^2\right) u_{xx} + 2u_x u_y \; u_{xy} + \left(1 - u_y^2\right) u_{yy} = f. \tag{2}$$

(a) Geben Sie eine Bedingung für ∇u derart an, dass (2) hyperbolisch ist.

(b) Geben Sie eine Bedingung für ∇u derart an, dass (2) elliptisch ist.