Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

SoSe 2019

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am **Mittwoch, den 29.05.2019, um 16 Uhr**.

Aufgabe 1. **(4 Punkte)** Geben Sie eine explizite Lösung für das folgende Anfangswertproblem an:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = e^{-x^2}\sin(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 2. (a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die Wellengleichung mit Hilfe von Charakteristiken:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^+, \\ u(s,s) = 2\sin^2(s) & \text{für } s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ u_x(0,t) = \sin(t) & \text{für } t \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Hinweis 1: Setzen Sie zunächst $v(x,t) = (\partial_t + \partial_x)\, u(x,t)$ und betrachten Sie das Problem

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_x(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^+, \\ v(s,s) = ... & \text{für } s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Hinweis 2: Leiten Sie mit Hilfe von v und der Bedingung $u_x(0,t) = \sin(t)$ für $t \in [0,\pi]$ her, was für $u(0,t)$ gelten muss. Lösen Sie nun

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) = v(x,t) & \text{für } (x,t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = ... & \text{für } t \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(b) Auf welchem Gebiet $\Omega \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^+$ ist die Lösung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 3. Sei $c > 0$ und $(x,t) \mapsto u(x,t)$ eine Lösung von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$U(x,t) = \frac{u(|x|, t)}{|x|} \tag{1}$$

eine Lösung von $U_{tt} - c^2 \Delta U = 0$ für $(x,t) \in \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}^+$ ist.

(b) Für welche Anfangsbedingungen $u(x,0)$ und $u_t(x,0)$ ist U in (1) zu erweitern zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$?

Aufgabe 4. **(2+2+4 Punkte)** Wir möchten folgendes Anfangswertproblem für die Wellengleichung lösen:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) & \text{für } (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in [0,\pi], \\ u_x(0,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}^+, \\ u(\pi,t) = 0 & \text{für } t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Wie kann man f und u_0 für $x \notin [0,\pi]$ fortsetzen, um eine Lösung von (2) mittels der Lösung des Problems

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - c^2 \tilde{u}_{xx}(x,t) = \tilde{f}(x,t) \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

zu erhalten? Hier sind $\tilde{u}_0$ und $\tilde{f}$ jeweils die Fortsetzungen von u und f, d.h. $\tilde{u}_0(x) = u_0(x)$ und $\tilde{f}(x,t) = f(x,t)$ für $x \in [0,\pi]$ und $t \in \mathbb{R}^+$.

(b) Welche Bedingungen an f und u_0 müssen erfüllt sein, damit u eine C^2-Lösung ist?

(c) Jede $L^2(0,\pi)$-Funktion u_0 kann man schreiben durch

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi_k(x) \qquad \text{mit} \qquad b_k = \int_0^{\pi} \varphi_k(x) u_0(x) dx,$$

wobei man für das vollständige Orthonormalsystem $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die folgenden drei Möglichkeiten hat:

$$\begin{aligned} i) \quad & \varphi_k(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sin((k+1)x) \quad && \text{für } k \in \mathbb{N}, \\ ii) \quad & \varphi_k(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cos\left(\left(\tfrac{1}{2} + k\right) x\right) \quad && \text{für } k \in \mathbb{N}, \\ iii) \quad & \varphi_k(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \begin{cases} \cos(kx) & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ gerade}, \\ \sin((k+1)x) & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Lösungen von (2) findet man mittels $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t)\varphi_k(x)$. Für unser Problem (2) passt nur eine der drei oben genannten Möglichkeiten für $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Welche? Berechnen Sie für $f = 0$ auch die $b_k(t)$ in Abhängigkeit von b_k.

Aufgabe 5. **(2+2+2+2 Punkte)** Der Cauchyscher Hauptwert bei der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist definiert durch

$$CH\frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x)\, dx \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-K,K]$ gilt:

$$\left| CH\frac{1}{x}(\varphi) \right| \le 2K \left\| \varphi' \right\|_{L^\infty(-K,K)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx$.

(b) Zeigen Sie, dass $CH\frac{1}{x}$ eine Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass für die Ableitung $\left(CH\frac{1}{x}\right)'$ gilt

$$\left(CH\frac{1}{x}\right)'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{-1}{x^2} (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{-1}{x^2} (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx \right).$$

(d) Ist die Abbildung

$$\left(CH\frac{-1}{x^2}\right)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{-1}{x^2} \varphi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{-1}{x^2} \varphi(x)\, dx \right)$$

eine Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$?