Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **SoSe 2019**

Partielle Differentialgleichungen

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten für Partielle Differentialgleichungen (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 06.06.2019, um 14 Uhr.

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Sei v_1 die Lichtgeschwindigkeit in der Luft und v_2 die in Wasser:

$$v_1 = 3 \times 10^5 km/s \text{ und } v_2 = 2,25 \times 10^5 km/s.$$

$100m$ oberhalb vom Wasser befindet sich eine pulsierende Leuchte. Die Wasseroberfläche wird durch $x_3 = 0$ beschrieben. Die Leuchte hat Position $P = (0, 0, 100)$, ist kugelförmig und hat einen Radius von einem Meter. Die zugehörige Differentialgleichung ist

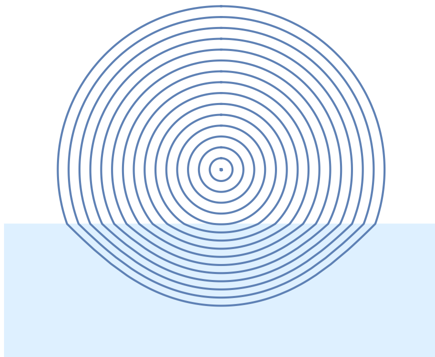
$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c_1^2 \Delta u(x,t) = p(t) & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \text{ mit } |x - P| < 1, \\ u_{tt}(x,t) - c_1^2 \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \text{ mit } x_3 > 0 \text{ und } |x - P| > 1, \\ u_{tt}(x,t) - c_2^2 \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \text{ mit } x_3 < 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Hier ist x_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ in Metern und t in Sekunden anzugeben.

(a) Berechnen Sie c_1 und c_2.

(b) Geben Sie eine Formel an, die beschreibt wie sich die Lichtwellen nahe an der Quelle verbreiten.

(c) Erklären Sie die Rollen von x_1, x_2, x_3 und t im Bild.



Aufgabe 2. (3+2+3 Punkte) Wir betrachten mit $B_\pi(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3; |x| < \pi\right\}$ das Problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in B_\pi(0) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial B_\pi(0) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in B_\pi(0), \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in B_\pi(0), \end{cases}$$

für die stetige Funktion u_0 mit $u_0(x) = \frac{\sin(|x|)}{|x|}$ für $|x| \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass es nur eine $C^2\left(\overline{B_\pi(0)} \times [0, \infty)\right)$-Lösung hat. *Hinweis: Betrachten Sie*

$$E(t) = \int_{B_\pi(0)} \left(u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2\right) dx.$$

(b) Berechnen Sie $-\Delta u_0(x)$.

(c) Verwenden Sie einen Produktansatz, um die Lösung zu berechnen.

Aufgabe 3. **(3+3 Punkte)** Das Gebiet und u_0 ist wie in der letzten Aufgabe. Wir betrachten hier das Problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + u\,(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in B_\pi\,(0) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial B_\pi\,(0) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0\,(x) & \text{für } x \in B_\pi\,(0)\,, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{für } x \in B_\pi\,(0)\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass auch dieses Problem eine eindeutige $C^2\left(\overline{B_\pi\,(0)} \times [0,\infty)\right)$-Lösung hat.

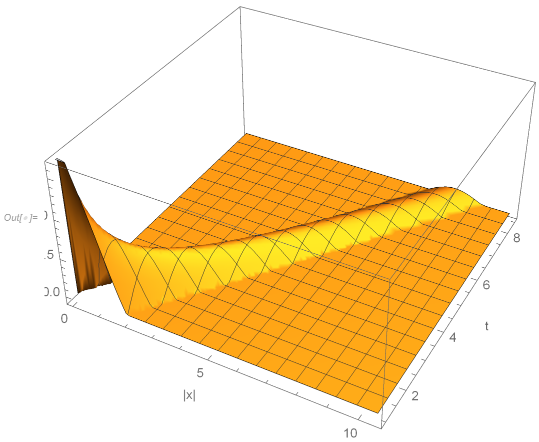
(b) Berechnen Sie auch diese Lösung.

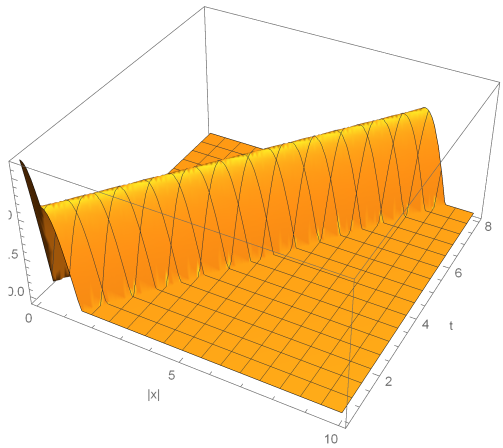
Aufgabe 4. Wir betrachten für Funktionen $u_0, v_0 \geq 0$ mit kompaktem Träger das Problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0\,(|x|) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) = v_0\,(|x|) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(a) Begründen Sie, dass die Lösungen radial-symmetrisch bezüglich x sind.

(b) Wenn $x \mapsto u\,(x,t)$ radial-symmetrisch ist, dann ist $\tilde{u}\,(|x|\,,t) := u\,(x,t)$ wohldefiniert. Unten stehen zwei Bilder einer solchen Funktion $r \mapsto \tilde{u}\,(r,t)$ für $n \in \{1,2,3\}$ mit u_0, v_0 wie oben. Welches n gehört zu welchem Bild? Begründen Sie Ihre Antwort.





Aufgabe 5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} t\; u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f\,(x,t) & \text{für } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = v_0\,(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

höchstens eine Lösung in $C^2\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ hat (obwohl nur ein Anfangswert gegeben ist).