Name: Aufgabe 1

Wir betrachten das Funktional $J : W_0^{1,2}(0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(u) = \int_0^1 \left(e^x u'(x)^2 + u(x) \right) dx.$$

a. Begründen Sie, dass dieses Funktional höchstens ein Minimum in $W_0^{1,2}(0,1)$ besitzt.

b. Berechnen Sie das Minimum.

Name: Aufgabe 2

Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; 1 < |x| < 2\}$ und sei $f \in L^2(\Omega)$. Finden Sie einen passenden Hilbertraum $H(\Omega)$ und ein Funktional $J : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ derart, dass das Minimum von J auf $H(\Omega)$ eine schwache Lösung liefert für

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \dfrac{u(x)}{\sqrt{1+u(x)^2}} = f(x) & \text{für } 1 < |x| < 2, \\ u(x) = 0 & \text{für } |x| = 2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) = 0 & \text{für } |x| = 1. \end{cases}$$

NAME:	AUFGABE 3	

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$ und $0 \in \Omega$.

a. Beschreiben Sie $W^{2,2}(\Omega)$ und $C^{0,\frac{1}{3}}(\overline{\Omega})$ und die dazugehörigen Normen.

b. Geben Sie eine derartige Bedingung an, dass $W^{2,2}(\Omega)$ eingebettet ist in $C^{0,\frac{1}{3}}(\overline{\Omega})$.

c. Wir betrachten die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) = |x|$.
Für welche Dimensionen n gilt, dass $u \in W^{2,2}(\Omega)$?
Hinweis: Für $x \neq 0$ gilt:

$$|\nabla u(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)^2} = 1 \text{ und } \left|\nabla^2 u(x)\right| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)^2} = \frac{\sqrt{n-1}}{|x|}.$$

NAME:	AUFGABE 4	

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^4}{1+u^2} - x \cdot x\right) dx.$$

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

a. J ist konvex.

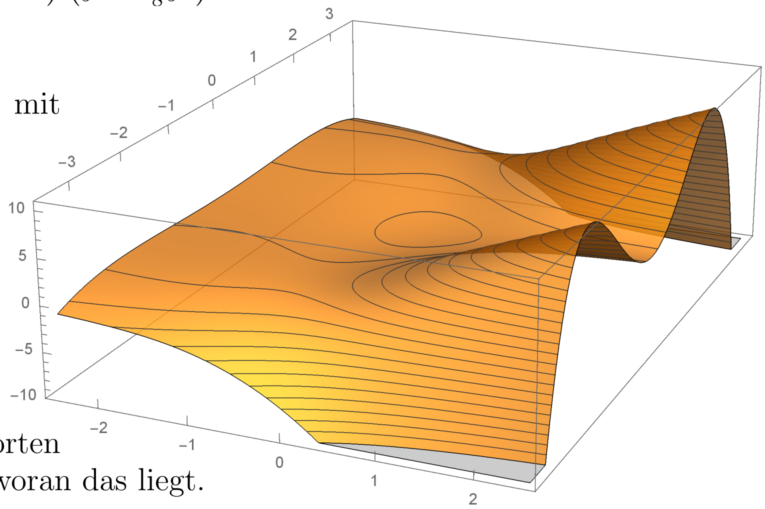
b. J ist stetig.

c. J ist schwach unterhalb folgenstetig.

Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie jeweils an, wie der Begriff definiert ist.
Hinweis: Für $u, v \in \mathbb{R}$ gilt $\left|\frac{u^4}{1+u^2} - \frac{v^4}{1+v^2}\right| \leq |u^2 - v^2|$.

Name:	Aufgabe 5	

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y^2-\frac{1}{8}y^4\right)-e^{-x^2}$. Diese Funktion hat ein striktes lokales Minimum in $(0,0)$.



a. Zeigen Sie, dass es $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt mit $f(x_0, y_0) < f(0,0)$.

b. Ist die Palais-Smale Bedingung für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfüllt?

c. Wie viele Sattelpunkte hat f?

- Begründen Sie diese Zahl.
- Wenn Sie diese Frage nicht beantworten können, dann sollen Sie erklären, woran das liegt.