Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Wir definieren $J_1, J_2, J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$J_1(u) = \int_\Omega \left( u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2 + u_x(x,y)\, u_y(x,y) \right) d(x,y),$$

$$J_2(u) = \int_\Omega \cos(u(x,y))\, d(x,y),$$

und setzen $J(u) = J_1(u) + J_2(u)$. Wir sind interessiert an $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ derart, dass

$$J(u_0) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u). \tag{1}$$

❶ (a) Wenn eine Lösung $u_0$ existiert, welches schwach formulierte Randwertproblem erfüllt sie?

(b) Wenn man zeigen kann, dass $u_0 \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt, welches stark formulierte Randwertproblem erfüllt $u_0$?

(c) Zeigen Sie die Herleitung diese Randwertprobleme.

❷ Ist die partielle Differentialgleichung im Randwertproblem von 1b elliptisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

❸ (a) Welche Art Bedingung am Problem braucht man, um von $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ nach $u_0 \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ zu gelangen?

(b) Skizzieren Sie den Beweis, dass wenn diese Bedingung erfüllt ist und $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existiert, dass $u_0 \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

❹ (a) Wann heißt ein Funktional $F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ konvex?

(b) Ist $J_1 : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ konvex? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Ist $J_2 : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ konvex? Begründen Sie Ihre Antwort.

❺ (a) Wann heißt ein Funktional $F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ koerzitiv?

(b) Begründen oder verneinen Sie die Aussage: *Das Funktional $J$ ist koerzitiv.*

❻ Wie lautet die Ungleichung von Poincaré-Friedrichs?

Wir nehmen ab hier an, dass es $0 < r < R < \infty$ gibt mit

$$B_r(0) \subset \Omega \subset B_R(0).$$

❼ Begründen oder verneinen Sie die Aussage: *Wenn $R$ genügend klein ist, dann kann man mit Hilfe von Poincaré-Friedrichs zeigen, dass das Funktional $J$ konvex ist.*

❽ Angenommen, das Funktional $J$ ist konvex, bestimmen Sie $u_0$.

Wir definieren $M_\Omega = \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) ; \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}$. Sei $\varphi^* \in M_\Omega$ derart, dass

$$\lambda_\Omega^* = J_1(\varphi^*) = \inf_{u \in M_\Omega} J_1(u).$$

❾ Begründen oder verneinen Sie die Aussage: *Wenn $\Omega_1 \subset \Omega_2$, dann gilt $\lambda_{\Omega_2}^* \le \lambda_{\Omega_1}^*$.*

❿ Begründen oder verneinen Sie die Aussage: *Wenn $r$ genügend groß ist, dann hat (1) keine oder mindestens 2 Minima.*