Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt ist unbepunktet, muss nicht abgegeben werden und wird in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein unbeschränktes Gebiet. Ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm für $C_b(\overline{\Omega})$?

Aufgabe 2:

a) Ist $\|\cdot\|_{\infty,1}$ definiert durch $\|u\|_{\infty,1} := \|u'\|_\infty$ eine Norm auf den stetig differenzierbaren Funktionen $C^1([-1,1])$?

b) Ist $C^1([-1,1])$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\infty,2}$ definiert durch $\|u\|_{\infty,2} = \|u'\|_\infty + |u(0)|$ ein Banachraum?

Aufgabe 3: Sei $X_n := \{p : [0,1] \to \mathbb{R} : p \text{ ist ein Polynom vom Grad höchstens } n\}$ und

$$X := \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

a) Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum ist.

b) Ist $(X, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig?

Aufgabe 4: Seien $\alpha, \beta \in (0,1)$. Angenommen $u \in C^{0,\alpha}([0,1])$ und $v \in C^{0,\beta}([0,1])$ mit $v([0,1]) \subset [0,1]$. Zeigen Sie, dass

a) $u \circ v \in C^{0,\alpha\beta}([0,1])$.

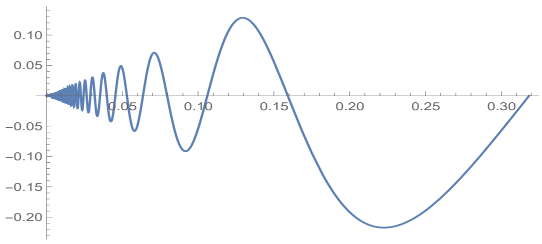
b) Geben Sie Funktionen u und v an, sodass $u \circ v \notin C^{0,\alpha\beta+\varepsilon}([0,1])$ für jedes $\varepsilon > 0$.

c) $uv \in C^{0,\min(\alpha,\beta)}([0,1])$.

d) Wenn zusätzlich $\inf_{x\in[0,1]} |v(x)| > 0$, dann gilt auch $\frac{u}{v} \in C^{0,\min(\alpha,\beta)}([0,1])$.

e*) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right], \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



Hölder-stetig mit Hölder-Konstante $\frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 5: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Sei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x,y) \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung einer Oberfläche im $\mathbb{R}^3$. Den Inhalt dieser Oberfläche können wir mit folgendem Integral berechnen:

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x,y)|^2} d(x,y).$$

Wir suchen die Oberfläche mit minimalem Inhalt, die sogenannte Minimalfläche. Welche Differentialgleichung erhalten wir, wenn wir den Ansatz

$$\tfrac{\partial}{\partial \tau} A(u + \tau\varphi)_{|\tau=0} = 0$$

mit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ verwenden?

Aufgabe 6: Betrachte die Funktion $f : B_1(0)\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Kann f so fortgesetzt werden, dass $f \in C^1(B_1(0))$ gilt?

Aufgabe 7: Betrachten Sie das folgende Funktional

$$J(u) = \int_1^2 x u'(x)^2 dx$$

Welche Funktion $u \in C^2([1,2])$ mit $u(1) = 0$ und $u(2) = 1$ erhalten wir, wenn wir den Ansatz

$$\tfrac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau\varphi)_{|\tau=0} = 0 \tag{1}$$

für alle $\varphi \in C_0^2([1,2])$ verwenden?

Aufgabe 8: Sei $J : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional, das Gâteau-differenzierbar in $u \in X$ ist. Ist $J'(u) := \left(\varphi \mapsto \tfrac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau\varphi)\right) : X \to \mathbb{R}$ dann linear? Um diese Frage zu beantworten beweisen Sie die folgenden beiden Teilaufgaben:

a) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und

$$J(u) = \begin{cases} \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} & \text{für } u \neq 0, \\ 0 & \text{für } u = 0. \end{cases}$$

Dann ist J Gâteau-differenzierbar in 0.

b) $J'(0)$ ist nicht linear.