Prof. Dr. Guido Sweers **WS 2019/2020**
Inka Schnieders, M.Sc.

Variationsrechnung

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 17.10.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $\beta \in (0, 1]$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) = x^\beta$ liegt in $C^{0,\beta}([0, 1])$.

b) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \int_0^x \beta t^{\beta-1} \log(t) dt$$

liegt in $C^{0,\mu}([0, 1])$ für jedes $0 < \mu < \beta$.

Aufgabe 2: Für $u \in C([0, 1])$ definieren wir $\|u\| := \sqrt{\int_0^1 u(x)^2 dx}$.

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf den stetigen Funktionen $C([0, 1])$ ist.

b) Ist der Raum $(C([0, 1]), \|\cdot\|)$ ein Banachraum?

Aufgabe 3: Sei $X = \{C^2(\overline{\Omega});\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in \partial\Omega\}$. Betrachten Sie das Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Angenommen $u \in X$ minimiert J. Welches Randwertproblem löst u?

Aufgabe 4 (4+1 Punkte)**:** Wir möchten zeigen, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist. Seien $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (1, 1)$. Nehmen Sie an, dass sich die Verbindung durch eine Kurve

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren lässt, wobei $u \in C^2([0, 1])$.

a) Finden Sie u, das die Bogenlänge bzw. den Abstand der beiden Punkte minimiert.

b) Begründen Sie kurz, dass die berechnete Kurve aus a) die kürzeste Verbindung darstellt, wenn wir beliebige zweimal differenzierbare Kurven mit Startpunkt P_1 und Endpunkt P_2 zulassen.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)**:** Seien $J_1, J_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die beiden Funktionale

$$J_1(u,v) = \begin{cases} \left(\frac{uv^2}{u^2+v^4}\right)^2 & \text{für } (u,v) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (u,v) = (0,0), \end{cases}$$

$$J_2(u,v) = \begin{cases} \frac{u|v|}{\sqrt{u^2+v^2}} & \text{für } (u,v) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (u,v) = (0,0). \end{cases}$$

a) Ist J_1 bzw. J_2 Gateaux-differenzierbar in $(0,0)$?

b) Ist J_1 bzw. J_2 Fréchet-differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe 6 (3+3+3 Punkte)**:** Sei $X := \{u \in C(0,1);\ \|u\|_X < \infty\}$ mit

$$\|u\|_X = \sqrt{\int_0^1 u(x)^2 dx}.$$

Betrachten Sie das folgende Funktional

$$J : X \to X, \qquad J(u)(t) := \sin(u(t)) + \cos(u(t)).$$

Man kann analog zu Definition 1.5.1 des Vorlesungsskriptes Differenzierbarkeit für ein Funktional $J : X \to X$ definieren. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) J ist auf X Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$ sodass

$$\|J(u) - J(v)\|_X \leq C\|u - v\|_X \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

b) J ist auf X Gateaux-differenzierbar, d.h.

1. Für jedes $\varphi \in X$ existiert

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{J(u + \tau\varphi) - J(u)}{\tau} =: J'(u)(\varphi).$$

2. $\varphi \mapsto J'(u)(\varphi) : X \to X$ ist stetig.

c) J ist in $u = 0$ Fréchet-differenzierbar, d.h. es gilt zusätzlich zu b), dass

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\|J(\varphi) - J(0) - J'(0)(\varphi)\|_X}{\|\varphi\|_X} = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $n \geq 2$ die Funktionen

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} nt & \text{für } t \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ 2 - nt & \text{für } t \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \\ 0 & \text{für } t \in \left(\frac{2}{n}, 1\right). \end{cases}$$

Aufgabe 7: Analog zum Beispiel der Brachystrochrone, betrachten wir eine Achterbahn ohne Reibung, die $(0,0)$ mit $(6,-1)$ verbindet. Wir starten nun jedoch mit der Geschwindigkeit $|v| = 1$ anstatt $|v| = 0$. Welche Kurve sorgt für die schnellste Verbindung?