Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 19.12.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**:** Betrachten Sie die Funktion f gegeben durch

$$f(z) = \left| e^{-\frac{1}{z^2}} \right| \text{ für } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Kann man f in 0 so fortsetzen, dass die Funktion auf $\mathbb{C}$ oberhalb- bzw. unterhalbstetig wird? Wenn ja, geben Sie alle möglichen Fortsetzungen an.

Aufgabe 2:

a) Seien X und Y Banachräume und $L : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass L genau dann kompakt ist, wenn $L(B_1(0))$ präkompakt ist.

b) Sei $g \in C([0,1])$ und betrachten Sie den Operator $L : C([0,1]) \to C([0,1])$ definiert durch

$$(Lf)(x) = \int_0^x f(s)g(s)ds.$$

Zeigen Sie, dass der Operator kompakt ist.
Hinweis: Verwenden Sie Arzela-Ascoli.

c) Betrachten Sie die Operatoren $L_1, L_2 : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ gegeben durch

i. $(L_1 u)(x) = u'(x)$,

ii. $(L_2 u)(x) = u(x)$.

Sind die Operatoren kompakt?

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**:**

a) Seien X, Y und Z Banachräume. Sei $L_1 : X \to Y$ ein linearer stetiger Operator und $L_2 : Y \to Z$ kompakt. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $L_2 \circ L_1 : X \to Z$ kompakt ist.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$. Für $f \in L^2(\Omega)$ besitzt

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Man kann auch zeigen, dass $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ und, dass der Lösungsoperator $\mathcal{G} : L^2(\Omega) \to W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert durch $(\mathcal{G}f)(x) = u(x)$ stetig ist. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\mathcal{G}} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \quad \text{definiert durch} \quad (\tilde{\mathcal{G}}f)(x) = u(x) \text{ für } x \in \Omega$$

kompakt ist.

Aufgabe 4: Seien X und Y Banachräume.

a) Sei $K \subset X$. Zeigen Sie, dass K genau dann kompakt ist, wenn K folgenkompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass eine kompakte lineare Funktion $f : X \to Y$ vollstetig ist.

Aufgabe 5: Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, $p \in (1, \infty)$ und $b > 0$ eine Konstante. Betrachten Sie das Funktional $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 - b\, |u(x)|^p \right) dx.$$

Zeigen Sie mithilfe der Folge

$$u_k(x) = k \max\left(0, 1 - k^2|x|\right) \text{ für } k \in \mathbb{N}^+,$$

dass J für

$$(p, b) \in (\{6\} \times (84, \infty)) \cup ((6, \infty) \times (0, \infty))$$

nicht schwach unterhalbfolgenstetig ist. Sie dürfen verwenden, dass $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Aufgabe 6 (0+0+0+4+4+4 Punkte)**:** Sei $\Omega = (0, 2\pi)^2$ und $b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Funktional $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u(x, y)|^2 + b\, u(x, y)^2 \right) d(x, y)$$

a) Zeigen Sie, dass J folgenstetig ist.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u_k(x, y) = \frac{1}{k} \sin(kx) \sin(ky).$$

Zeigen Sie, dass $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Es darf verwendet werden, dass man analog zu Theorem 8.3.1 einen wohldefinierten Spuroperator $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ für Gebiete mit Lipschitz-Rand bekommt. Außerdem gilt auch hier wieder $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \Leftrightarrow Tu = 0$.

c) Zeigen Sie, dass J nicht schwach folgenstetig ist. Berechnen Sie dafür $J(u_k)$ und verwenden Sie, dass $u_k \rightharpoonup 0$. Die schwache Konvergenz von u_k müssen Sie nicht beweisen.

d) Zeigen Sie, dass für festes $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die Funktionale $H_u, L_u : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$H_u(v) = \int_\Omega \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) d(x, y), \quad L_u(v) = \int_\Omega u(x, y) v(x, y) d(x, y)$$

stetig und linear sind.

e) Sei nun $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$. Zeigen Sie, dass

$$J(u_k) - J(u)$$
$$= \int_\Omega \left(|\nabla u_k - \nabla u|^2 + 2\nabla u_k \cdot \nabla u - 2|\nabla u|^2 + b|u_k - u|^2 + 2b u_k u - 2bu^2 \right) d(x, y).$$

f) Sei $b \geq -\frac{1}{C_{PF}}$, wobei $C_{PF} > 0$ so gewählt wurde, dass $\int_\Omega |v|^2 d(x, y) \leq C_{PF} \int_\Omega |\nabla v|^2 d(x, y)$ für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass dann J schwach unterhalbfolgenstetig ist.