Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 09.01.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: (2+2+3+0 Punkte) Wir definieren die Funktion $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{10}{|x|\left(1 + 10|x|\right)^2} \text{ für } x \neq 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $f \in L^p(B_1(0))$ für $p < 2$ und $f \notin L^p(B_1(0))$ für $p \geq 2$.

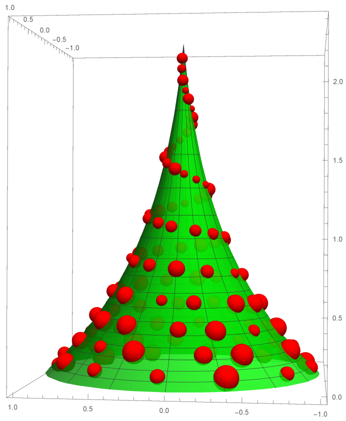
b) Zeigen Sie, dass $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) = \log\left(\frac{11}{1 + 10|x|}\right)$$

eine Lösung ist von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{für } x \neq 0, \\ u = 0 & \text{für } |x| = 1. \end{cases}$$

Rechts sehen Sie die Lösung u (grün). Die roten Kugeln sind Weihnachtsdekoration.



c) Für welche $\gamma \in [0, 1]$ gilt $u \in C^{0,\gamma}(\overline{B_1(0)})$? Gilt $u \in C^1(\overline{B_1(0)})$?

d) Für welche $p \in [1, \infty]$ gilt $u \in W^{2,p}(B_1(0))$? Für welche $p \in [1, \infty]$ gilt $u \in W^{1,p}(B_1(0))$?

Aufgabe 2: a) Geben Sie ein Beispiel für einen reflexiven Banachraum X und ein Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ an, sodass J ein Minimum besitzt und unterhalbfolgenstetig, jedoch nicht koerzitiv ist.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen reflexiven Banachraum X und ein Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ an, sodass J ein Minimum besitzt und koerzitiv, jedoch nicht unterhalbfolgenstetig ist.

Aufgabe 3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet $p \in (1, \infty)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Überprüfen Sie die folgenden Funktionale auf Koerzitivität:

a) Sei $J : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $J(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$.

b) Sei $J : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + u(x)^2 - f(x)u(x)\right) dx$.

Aufgabe 4: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $f \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega f(x)dx \neq 0$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$. Sei $u_g \in W^{1,2}(\Omega)$, sodass $Tu_g = g$ und

$$X = \{u = u_1 + u_g; u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)\} \subset W^{1,2}(\Omega).$$

Betrachten Sie das Funktinoal $J : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)\right) dx. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass J koerzitiv ist.

b) Zeigen Sie, dass J schwach unterhalbfolgenstetig ist.

c) Zeigen Sie damit, dass J ein Minimum in X besitzt.

d) Besitzt J definiert auf $W^{1,2}(\Omega)$ ein Minimum?

Aufgabe 5: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $b > -\frac{1}{C_{PF}}$ und $a > -\frac{1}{C_{PF}^2}$, wobei $C_{PF} > 0$ so gewählt wurde, dass $\int_\Omega |v|^2 dx \leq C_{PF} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Sei außerdem $f \in L^2(\Omega)$. Wir definieren das Funktional $J_2 : W_0^{2,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$J_2(u) = \int_\Omega \big(2(\Delta u(x))^2 + b\,|\nabla u(x)|^2 + a\,u(x)^2 - f(x)u(x)\big)\, dx.$$

Zeigen Sie, dass das Funktional J_2 ein Minimum besitzt, indem Sie beweisen, dass es nach unten beschränkt, koerzitiv und schwach unterhalbfolgenstetig ist.

Aufgabe 6 (3+3+3+1+3)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ und $X = W^{1,2}(\Omega)$. Sei nun $f \in L^2(\Omega)$ so gewählt, dass $\int_\Omega f(x)dx = 0$. Das Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ sei definiert wie in (1). Sei außerdem

$$Y := \left\{u \in W^{1,2}(\Omega); \int_\Omega u(x)dx = 0\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge bezüglich der schwachen Topologie ist.

Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ gibt es analog zum eindimensionalen Fall auch eine Poincaré-Friedrichs Ungleichung für höhere Dimenionen:

> *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann gibt es ein $C_\Omega > 0$, sodass für alle $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\bar{u} := \lambda(\Omega)^{-1} \int_\Omega u(x)dx$ gilt*
>
> $$\int_\Omega (u(x) - \bar{u})^2 dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

b) Zeigen Sie, dass $J : Y \to \mathbb{R}$ koerzitiv ist.

c) Zeigen sie, dass $J : Y \to \mathbb{R}$ schwach unterhalbfolgenstetig ist.

d) Folgern Sie aus a)-c), dass J in Y ein Minimum besitzt.

e) Zeigen Sie, dass J ein Minimum in X annimmt. Berechnen Sie dazu $J(u - \bar{u})$ und verwenden Sie die Ergebnisse für Y.