Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 16.01.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $c \in C(\overline{\Omega})$ mit $f, c \geq 0$. Betrachten Sie das Funktional $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + c(x)u(x)^2 - f(x)u(x)\right) dx.$$

Zeigen Sie, dass wenn $\partial J(u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dann gilt $u \geq 0$.

Aufgabe 2: Sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten die Funktionale $J_1, J_2, J_3 : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J_1(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + \arctan(u^2) - fu\right) dx,$$

$$J_2(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - f^+u\right) dx \text{ und } J_3(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - f^-u\right) dx.$$

Seien u_i mit $i \in \{2,3\}$ die zugehörigen Minimierer. Zeigen Sie

a) dass, $u_2, u_3 \geq 0$ und

b) dass $-u_3 \leq u_1 \leq u_2$, für alle $u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, welche die schwache Euler-Lagrange Identität $\partial J_1(u_1, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ erfüllen.

Aufgabe 3: Sei $\Omega = (-1,1)$. Betrachten Sie die Funktionen $u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$u_1(x) = \operatorname{sign}(x)x^2, \qquad u_2(x) = \arctan(x)$$

a) Zeigen Sie, dass $u_i \in W^{2,2}(\Omega)$ für $i \in \{1,2\}$.

b) Gilt $u_i^+ = \max(0, u_i) \in W^{2,2}(\Omega)$ für $i \in \{1,2\}$?

Aufgabe 4: Finden Sie eine Funktion $\chi : [0,\infty) \to [0,1]$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq R, \\ 0 & \text{für } r \geq R+2, \end{cases}$$

$\chi \in C^\infty([0,\infty))$ und $|\chi'(r)| \leq 1$.

Aufgabe 5 (3+3+3+3 Punkte)**:** Für Funktionen $u \in W^{2,2}(\Omega)$ muss nicht $u^+, u^- \in W^{2,2}(\Omega)$ gelten. Man kann jedoch in manchen Fällen eine Zerlegung in einen positiven und negativen Teil finden. Sei im Folgenden $\Omega = (0,1)$ und $X = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

a) Sei $u \in X$. Geben Sie zwei Funktionen $u_1, u_2 \in X$ an, sodass
$$u_1'' = -(u'')^- \text{ und } u_2'' = -(u'')^+.$$

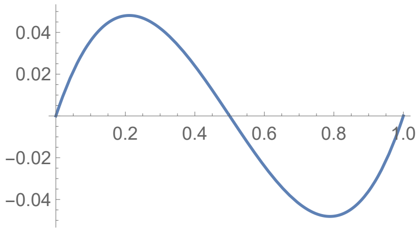
b) Zeigen Sie, dass u_1 und u_2 eindeutig sind.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 von Übungsblatt 7: $\|u\| = \left(\int_0^1 u''(x)^2 dx\right)^{1/2}$ *definiert eine Norm auf* X.

c) Zeigen Sie, dass
$$\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$$
wobei $\|\cdot\|$ die Norm aus Aufgabenteil b) ist.

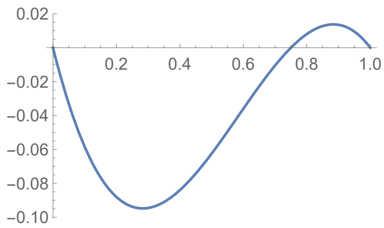
d) Zeigen Sie, dass $u = u_1 - u_2$ und, dass u_1 sowie u_2 nicht-negativ sind.

Aufgabe 6 (3+0 Punkte)**:** Finden Sie die beschriebene Zerlegung aus Aufgabe 5 für die folgenden Funktionen $u \in W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1)$ und zeichnen Sie die Funktionen u_1 und $-u_2$ in einen Graphen.

a) $u(x) = x(x-1)(x-\frac{1}{2})$,



b) $u(x) = x(x-1)(\frac{3}{4}-x)$.



Aufgabe 7 (5 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Betrachten Sie wieder die Konvektions-Diffusions-Gleichung
$$\begin{cases} -\Delta u + a \cdot \nabla u = f & \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$
wobei $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, die $\nabla \cdot a(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt. Wir haben bereits auf Blatt 7 in Aufgabe 4 bewiesen, dass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$
$$\int_\Omega u(x)\,(a(x) \cdot \nabla u(x))\,dx = 0$$
gilt und, dass das Problem eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Zeigen Sie, dass wenn $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ mit $f_1 \geq f_2$ und u_1 sowie u_2 die zugehörigen schwachen Lösungen sind, dann gilt $u_1 \geq u_2$.

Aufgabe 8: Kann man analog zu Aufgabe 5 eine Zerlegung in $W_0^{1,2}(0,1)$ definieren, indem man Funktionen $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(0,1)$ sucht, sodass
$$u_1' = (u')^+ \text{ und } u_2' = (u')^-?$$