Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

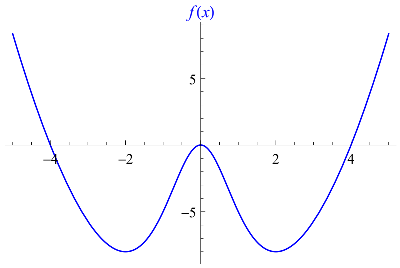
Variationsrechnung

Übungsblatt 13

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 23.01.2020, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^2(x^2-16)}{x^2+2}$$



und das Funktional $J : W_0^{1,2}((0,1)) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) := \int_0^1 f(u'(x))dx.$$

a) Zeigen Sie, dass J wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie, dass J ein Minimum in $W_0^{1,2}((0,1))$ besitzt und geben Sie ein Minimum an. *Hinweis: Berechnen Sie die Minima von f.*

c) Ist dieses Minimum eindeutig?

d) Gibt es ein Minimum in $C^1([0,1]) \cap C_0([0,1])$?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J_f(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + \frac{2u(x)^2 + u(x)^6}{u(x)^4 + u(x)^2 + 3} - f(x)u(x) \right) dx$$

mit $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die Funktion, die J_f minimiert. Zeigen Sie, dass wenn $f_1 \geq f_2$, dass dann $u_{f_1} \geq u_{f_2}$.

Aufgabe 3 (0+3+0+3 Punkte)**:** Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen die Palais-Smale Bedingung erfüllen:

a) $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_1(x,y) = e^{-y} - x^2$.

b) $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_2(x) = x\sin(x)$.

c) $F_3 : W_0^{1,2}((0,1)) \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_3(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx$.

d) $F_4 : W_0^{1,2}((0,1)) \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_4(u) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (u'(x)^2 + u(x)^2)dx$.

Aufgabe 4: Nehmen Sie an, dass $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Palais-Smale Bedingung erfüllt. Dann gilt für alle $c > 0$, dass $K_c := \{x \in \mathbb{R}^n, J(x) = c \text{ und } \nabla J(x) = 0\}$ kompakt ist.

Aufgabe 5: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f' dann wachsend ist.

Aufgabe 6: Betrachten Sie das Funktional $J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$J(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2.$$

Man kann zeigen, dass der einzige stationäre Punkt von J in $(0, 0)$ liegt. J kann also nicht alle Voraussetzungen des Mountain-Pass Theorems erfüllen. Geben Sie eine Voraussetzung des Theorems an, die nicht erfüllt ist.

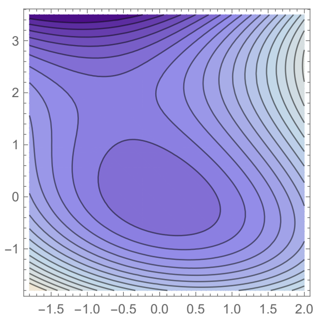
Aufgabe 7: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = e^{1+y} + e^{-y} + x^2 + \sin(x) + \cos(x).$$

Man kann eine Folge $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{\infty}$ finden, die gegen ein Minimum von f konvergiert. Sei dafür $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Beginnen Sie mit $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und berechnen Sie die ersten beiden Folgenglieder (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

Aufgabe 8: Wir führen im Folgenden eine Approximation eines Sattelpunktes durch. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - y^3 + 2xy.$$



Wenden Sie Algorithmus 2 aus der Vorlesung mit $\varepsilon = \frac{1}{4}$ und $(x_{test}, y_{test}) = (-1/2, 3)$ an, um die ersten beiden Folgenglieder $(n = 0, 1)$ der approximierenden Folge $\{(x^n, y^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ zu bestimmen. Rechts sehen Sie die Niveaulinien von f.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass sich das Minimum von f bei $(0, 0)$ mit $f(0, 0) = 0$ befindet. Zur Kontrolle: Der Sattelpunkt befindet sich an der Stelle $\left(-\frac{16}{27}, \frac{16}{9}\right) = (-0.59259\ldots, 1.77777\ldots)$.

Aufgabe 9 (4+4 Punkte): a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass wenn $x \mapsto |f(x)| + |\nabla f(x)|$ koerzitiv ist, dann erfüllt f die Palais-Smale Bedingung.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 + x \sin(z) + \frac{y}{\pi} \arctan(x).$$

Zeigen Sie, dass f einen positiven kritischen Wert besitzt, d.h. es existiert ein $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ und $c > 0$, sodass $f(x_0, y_0, z_0) = c$ und $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$.