Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 24.10.2019, um 12 Uhr.

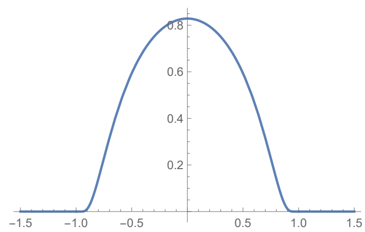
Aufgabe 1: Sei $c \in [0,1]$. Wir konstruieren $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} \chi(x) = c\,x & \text{für } x \le \frac{1}{10}, \\ \chi(x) = 1 & \text{für } x \ge \frac{9}{10}, \\ \chi'(x) \ge 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Wenn wir $c = 0$ setzen, erhalten wir ein χ wie im Beweis von Lemma 2.1.5 gefordert.

a) Wir definieren $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \ge 1 \end{cases} \quad \text{mit } C = \left(\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} dx \right)^{-1}.$$



Ein Bild von φ sehen sie rechts. Weiter definieren wir $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

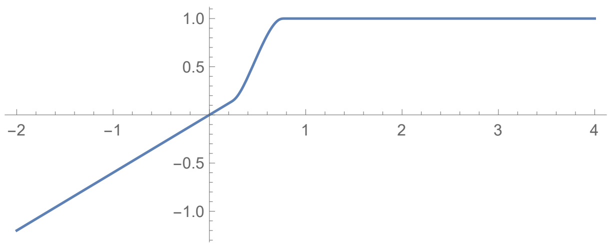
Zeigen Sie, dass $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$.

b) Sei $\chi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Faltung von φ_ε und χ_0:

$$\chi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \ge \frac{1}{2}, \\ c\,x & \text{für } x < \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \chi_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * \chi_0)(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)\chi_0(y)dy. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ und dass $\chi_\varepsilon'(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie, dass für $0 < \varepsilon \le \frac{2}{5}$ die Funktion χ_ε aus (2) eine Lösung von (1) ist.



Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien $u, v \in C([0,1])$. Es gelte die Gleichung

$$\int_0^1 (u(x)\varphi(x) + v(x)\varphi'(x))\,dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(0,1).$$

Zeigen Sie, dass dann v stetig differenzierbar auf $[0,1]$ ist und $v'(x) = u(x)$ für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Wir betrachten das Funktional $J : C^1([-1,1]) \to \mathbb{R}$, das gegeben ist durch

$$J(u) = \int_{-1}^1 \left(u'(x) - \max\left(x^2, x\right)\right)^2 dx.$$

Zeigen Sie, dass $u(x) = x \max\left(\frac{1}{3}x^2, \frac{1}{2}x\right) \in C^1([-1,1])$ und u ein Minimierer von J ist. Diese Funktion ist jedoch kein Element von $C^2([-1,1])$. Wieso ist dies kein Widerspruch zu dem folgenden Theorem?:

Für $F \in C^2([-1,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und $u \in C^1([-1,1])$ betrachten wir das Funktional $J : C^1([-1,1]) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) = \int_{-1}^1 F(x, u, u')dx.$$

Wenn J ein globales Minimum $\tilde{u} \in C^1([-1,1])$ hat und $F_{pp}(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) \neq 0$ gilt, dann folgt $\tilde{u} \in C^2([-1,1])$.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)**:** Sie möchten so schnell wie möglich von $A = (-10,-10)$ nach $B = (20,10)$.

a) Die Höchstgeschwindigkeit hängt von der Stelle ab:

$$v_{\max}(x,y) = \begin{cases} 5 \text{ Einheiten/Sekunde} & \text{für } |x| \geq 1, \\ 10 \text{ Einheiten/Sekunde} & \text{für } |x| < 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie den schnellsten Weg.

b) Nun ist die Höchstgeschwindigkeit eine Funktion von x:

$$v_{\max}(x,y) = f(x) \text{ Einheiten/Sekunde}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ist. Stellen Sie das zu minimierende Funktional auf.

c) Sei f aus b) eine positive und wachsende Funktion und $x \mapsto (x, y(x))$ die schnellste Kurve. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto y(x)$ konvex ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**:** Sei $X_{a,b} = \{u \in C^1([-1,1]); u(-1) = a, u(1) = b\}$ mit $a \neq b$ und $J : X_{a,b} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) = \int_{-1}^1 x^2 u'(x)^2 dx.$$

Zeigen Sie, dass J sein Infimum nicht in $X_{a,b}$ annimmt.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge

$$u_n(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)}.$$