Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 2019/2020**

Variationsrechnung

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 31.10.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die erste Variation und die Euler-Lagrange Gleichung für die beiden Operatoren $J_1 : C^1(\overline{\Omega}) \cap C_0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ und $J_2 : C^1(\overline{\Omega})\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch:

$$J_1(u) = \int_\Omega (x \cdot \nabla u(x))^2\, u(x) dx, \qquad J_2(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx}.$$

Aufgabe 2 (2+2+1 Punkte)**:** Sei $X = C^2([0,1]) \cap C_0([0,1])$. Wir betrachten das Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) = \int_0^1 \left(u(x)^2 - u'(x)^2\right) dx.$$

a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung und die eindeutige Lösung $u \in X$ dieser Gleichung in X.

b) Sei $P = \{p \text{ Polynom zweiter Ordnung }; p(0) = p(1) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $J(p) < J(u)$ für u aus Aufgabenteil a) und $p \in P$.

c) Die Euler-Lagrange-Gleichung wird durch u, jedoch durch keines der $p \in P$ gelöst. Wieso ist dies kein Widerspruch zu der folgenden Behauptung?:

Für $F \in C^2([-1,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und $u \in C^1([-1,1])$ betrachten wir das Funktional $J : C^1([-1,1]) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(u) = \int_{-1}^1 F(x,u,u')dx.$$

Wenn J ein globales Minimum $\tilde{u} \in C^2([-1,1])$ hat dann erfüllt $\tilde{u}$ die Euler-Lagrange Gleichung.

Aufgabe 3 (2+2+0 Punkte)**:** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Funktional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u''(x)^2 - \lambda u'(x)^2\right) dx.$$

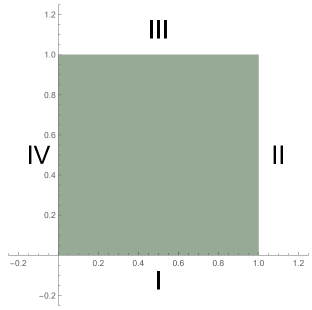
a) Es seien die Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$ und $u'(1) = 0$ gegeben. Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichung her und bestimmen Sie welche natürliche Randbedingung hinzukommt.

b) Sei $\lambda \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung mit den vier Randbedingungen aus a) eindeutig lösbar ist, wenn $\lambda \notin \{k^2\pi^2; k \in \mathbb{N}^+\}$. Zeigen Sie, dass das Randwertproblem für $\lambda \in \{k^2\pi^2; k \in \mathbb{N}^+\}$ keine Lösung besitzt.

c) Zeigen Sie, dass das Randwertroblem für alle $\lambda \in (-\infty, 0]$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**:** Wir betrachten das Modell einer quadratischen elastischen Platte, die sich unter der Einwirkung einer vertikalen Kraft durchbiegt. Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ und sei $u(x,y)$ die Auslenkung an der Stelle $(x,y) \in \Omega$. Die Kraftdichte ist gegeben durch f und σ sei die Poissonzahl. Dabei ist die Platte auf dem gesamten Rand gelenkig, d.h. $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Das Energiefunktional ist gegeben durch



$$E(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}(\Delta u)^2 + (1-\sigma)(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) + fu\right) d(x,y).$$

Sei der Rand von Ω unterteilt in

I$=[0,1] \times \{0\}$, II$=\{1\} \times (0,1)$,
III$=[0,1] \times \{1\}$, IV$=\{0\} \times (0,1)$.

Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichung her. Welche natürlichen Randbedingungen kommen hinzu? Die Ecken können Sie außer Acht lassen.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die mögliche Extremstelle des Funktionals $L : \{u \in C^1([0,\pi]); u(0) = u(\pi) = 0\} \to \mathbb{R}$

$$L(u) = \int_0^\pi \left(2u(x)\cos(x) + u'(x)^2\right) dx$$

unter der Nebenbedingung $\int_0^\pi u(x)dx = 1$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**:** Seien die Einheiten für x und y in Metern gegeben. Im Bereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\}$ befindet sich Wald. Wir möchten so schnell wie möglich von Punkt $A = (0,0)$ nach $B = (10,0)$ fahren. Dabei ist die Geschwindigkeit des Autos durch die steigende Funktion $v(x,y) = 1 + x$ m/s gegeben. Es soll außerdem der Wunsch des Beifahrers beachtet werden, der gerne die Landschaft zwischen der Fahrkurve und des Waldes mit einer Fläche von $20\,\mathrm{m}^2$ betrachten möchte. Sei $x \mapsto (x, y(x))$ die Kurve, die das Problem löst. Die benötigte Zeit wird durch das folgende Funktional beschrieben:

$$T(y) = \int_0^{10} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{1+x} dx.$$

Zeigen Sie, dass das gesuchte y die Gleichung

$$\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}(1+x)}\right)' = -\lambda \qquad (1)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ löst. Die Lösungskurve $x \mapsto (x, y'(x))$ löst also die Differentialgleichung

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = -\lambda x(1+x) + c_1(1+x).$$

für ein $c_1 \in \mathbb{R}$.

Die Lösungskurve sehen Sie rechts.