Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 2019/2020**

Variationsrechnung

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 07.11.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**:** Sei $X = C^1([0,2\pi]) \cap C_0([0,2\pi])$ und das Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u'(x)^2 - 4u(x)^2 \right) dx.$$

Welche Funktionen erhält man, wenn die erste Variation gleich Null gesetzt wird? Überprüfen Sie anschließend mit der zweiten Variation, ob die gefundenen Lösungen tatsächlich Minima in X sein können.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)**:** Seien $p, q \in \mathbb{N}^+$ mit p gerade und q ungerade, $X = C^1([-1,1]) \cap C_0([-1,1])$ und $J : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(u) = \int_{-1}^{1} \left(x^p u(x)^2 + x^q u'(x)^3 \right) dx$$

a) Bestimmen Sie die erste Variation $\partial J(u;\varphi)$ und zeigen Sie, dass $\partial J(0;\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C^1([-1,1]) \cap C_0([-1,1])$.

b) Bestimmen Sie die zweite Variation in $\partial^2 J(0;\varphi)$ und zeigen Sie, dass $\partial^2 J(0;\varphi) > 0$ für alle $\varphi \in (C^1([-1,1]) \cap C_0([-1,1])) \setminus \{0\}$.

c) Wir definieren für $\varepsilon < \frac{2}{\pi}$ die Funktion $u_\varepsilon(x) \in C^1([-1,1]) \cap C_0([-1,1])$:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^2 \cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 & \text{für } |x| < \frac{1}{2}\pi\varepsilon, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2}\pi\varepsilon \le |x| \le 1. \end{cases}$$

Sei $p + 1 > q$. Zeigen Sie, dass es dann ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, sodass $J(u_\varepsilon) < 0$ für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

d) Zeigen Sie, dass

$$\|u_\varepsilon - 0\|_{C^1[-1,1]} = \sup_{x \in [-1,1]} |u_\varepsilon(x)| + \sup_{x \in [-1,1]} |u_\varepsilon'(x)| \to 0$$

für $\varepsilon \downarrow 0$. Wenn wir die Entfernung zwischen zwei Funktionen durch die $\|\cdot\|_{C^1([-1,1])}$ Norm definieren, ist $u = 0$ also kein lokales Minimum.

Aufgabe 3 (2+0 Punkte)**:** Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und seien $g_k : X \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ konvexe Funktionen, sodass $\{g_k(x); k \in \mathbb{N}\}$ für jedes $x \in X$ beschränkt ist. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgende Aussage:

a) Die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \inf_{k \in \mathbb{N}} g_k(x)$ ist konvex.

b) Die Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(x)$ ist konvex.

Aufgabe 4: Seien $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $X = \{u \in C^1([a,b]); u(a) = A, u(b) = B\}$ sowie $F \in C^3([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir möchten folgendes Funktional $J : X \to \mathbb{R}$ minimieren:

$$J(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx.$$

Dazu können wir annehmen, dass die zweite Variation in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\partial^2 J(u; \varphi) =$$

$$\int_a^b F_{pp}(x, u(x), u'(x))\varphi'(x)^2 + \left(F_{uu}(x, u(x), u'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} F_{pu}(x, u(x), u'(x))\right) \varphi(x)^2 dx,$$

wobei $\varphi \in C^1([a,b]) \cap C_0([a,b])$. Wir wissen bereits, dass wenn $\bar{u} \in X$ ein lokaler Minimierer von J ist, $\partial^2 J(\bar{u}; \varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in C^1([a,b]) \cap C_0([a,b])$ gilt. Leiten Sie aus dieser Bedingung eine weitere notwendige Bedingung her:

a) Zeigen Sie, dass wenn $\bar{u} \in X$ ein lokaler Minimierer von J ist, die folgende Bedingung erfüllt sein muss:

$$F_{pp}(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) \geq 0 \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es ein $x_0 \in [a,b]$ gibt, sodass $F_{pp}(x_0, \bar{u}(x_0), \bar{u}'(x_0)) < 0$ und betrachten Sie für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ die Testfunktion

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^3 \left(\frac{1}{n^2} - (x - x_0)^2\right)^2 & \text{für } x \in [a,b] \text{ und } |x - x_0| \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Sei J gegeben durch $J(u) = \int_{-1}^1 x\sqrt{1 + u'(x)^2}dx$. Entscheiden Sie ob Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung Minimierer liefern können.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)**:**

a) Sei $u \in C^1([0,1]) \cap C_0([0,1])$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leq \int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

Hinweis: Begründen Sie warum

$$\int_0^1 u(x)^2 dx = \int_0^1 u(x) \int_0^x u'(s) ds dx \leq \int_0^1 |u(x)| dx \int_0^1 |u'(s)| ds$$

gilt und verwenden Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Sei außerdem $f \in C^2([0,1])$ und betrachten Sie das Funktional $J : C^1([0,1]) \cap C_0([0,1]) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(u) = \int_0^1 F(x, u(x), u'(x))dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(u'(x)^2 + f(x)u(x)^2\right) dx.$$

Wir nehmen an, dass $\bar{u} \in C^1([0,1]) \cap C_0([0,1])$ die Euler-Lagrange Gleichung erfüllt.

b) Sei zusätzlich $f(x) \geq -1$ für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass dann die notwendige Bedingung $\partial^2 J(\bar{u}; \varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in C^1([0,1]) \cap C_0([0,1])$ erfüllt ist.

c) Geben Sie eine Bedingung für f an, sodass $(u, p) \mapsto F(x, u, p)$ strikt konvex für jedes $x \in [0,1]$ ist.