Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 14.11.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Es gilt, falls $\lambda(\Omega) < \infty$ und $1 \leq p < q < \infty$, dass $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Zeigen Sie, dass dieses Ergebnis optimal ist:

a) Finden Sie eine Menge Ω mit $\lambda(\Omega) = \infty$ und eine Funktion $f \in L^q(\Omega)$, sodass $f \notin L^p(\Omega)$.

b) Finden Sie eine Menge Ω mit $\lambda(\Omega) < \infty$ und eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$, sodass $f \notin L^q(\Omega)$.

Aufgabe 2 (2+0 Punkte)**:** a) Sei $f(x) = \frac{1}{\|x\|^b}$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Für welche $b \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ liegt f in $L^p(B_1(0))$?

b) Sei $f(x) = \|x\|^a (1 + \|x\|)^b$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

   i) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$?

   ii) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $f \in L^1(B_1(0))$?

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)**:** Sei $p \in [1, \infty]$ und $\Omega = (-1, 1)$. Wir betrachten das Funktional $F_f : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_f(g) = \int_\Omega f(x) g(x) dx \qquad \text{für alle } g \in L^p(\Omega).$$

Bestimmen Sie die Norm von F_f, d.h. $\|F_f\|_{(L^p(\Omega))'}$ für $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$, wenn die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

a) $f(x) = \cos(\pi x)$,

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Aufgabe 4: Sei $\Omega = (0, 1)$ und $p \in (1, \infty)$.

a) Zeigen Sie, dass wenn $0 \leq f_k \in L^1(\Omega)$ schwach in $L^1(\Omega)$ gegen Null konvergiert, dann konvergiert f_k auch stark gegen Null.

b) Betrachten Sie die Funktionenfolge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ mit $f_k(x) = \sin(kx)$ und zeigen Sie, dass diese Folge schwach in $L^p(\Omega)$ gegen Null konvergiert.
Hinweis: Verwenden Sie, dass der Raum $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^q(\Omega)$ liegt.

c) Zeigen Sie, dass die Folge aus b) nicht stark in $L^p(\Omega)$ konvergiert.

d) Zeigen oder widerlegen Sie: Angenommen $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergieren schwach gegen 0 in $L^p(\Omega)$. Dann gibt es ein $q \in (1, \infty)$, sodass das Produkt der Folgenglieder $\{f_k g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ schwach in $L^q(\Omega)$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**:** Seien $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in [0,1]$ für $i \in \{1,\dots,m\}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Sei $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u(x_i).$$

Zeigen Sie, dass F in $C([0,1])'$ liegt und berechnen Sie die Norm $\|F\|_{C([0,1])'}$.

Aufgabe 6: Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $F : X \to Y$ heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit

$$\|F(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Wir schreiben außerdem

$$\|F\|_{L(X,Y)} = \sup\{\|F(x)\|_Y ; x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq 1\}.$$

a) Zeigen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

   i) F ist stetig in einem $x_0 \in X$.

   ii) F ist stetig.

   iii) F ist beschränkt.

b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ eine Norm auf dem Vektorraum $L(X,Y)$ aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y ist.

Aufgabe 7: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(\Omega) < \infty$, $p \in [1,\infty)$ und $g_k \in L^p(\Omega)$. Außerdem gelte für fast alle $x \in \Omega$

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x).$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Aus $|g_k(x)| \leq c_1$ für $c_1 \in \mathbb{R}^+$ für fast alle $x \in \Omega$ folgt $\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{L^p(\Omega)} = 0$.

b) Aus $\|g_k\|_{L^p(\Omega)} \leq c_2$ für $c_2 \in \mathbb{R}^+$ folgt $\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{L^p(\Omega)} = 0$.

Aufgabe 8 (3+3+3 Punkte)**:** Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset [0,1]$ und $p \in (1,\infty)$. Betrachten Sie die Folge $f_n(x) = f(x-n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Gegen welche Funktion konvergiert f_n schwach in $L^p(\mathbb{R}^+)$?

b) Konvergiert f_n in $L^p(\mathbb{R}^+)$ auch stark gegen die Grenzfunktion aus a)?

c) Zeigen Sie, dass f_n in $L^1(\mathbb{R}^+)$ nicht schwach gegen die Grenzfunktion aus a) konvergiert.

Aufgabe 9: Finden Sie eine Menge Ω und eine Funktionenfolge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ mit $f_k \geq 0$ und $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_k(x)dx < \infty$, sodass die strikte Ungleichung im Lemma von Fatou gilt. Sei also $f(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$ fast überall und

$$\int_\Omega f\,dx < \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,dx.$$