Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 2019/2020**

Variationsrechnung

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 21.11.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass die folgenden Rechenregeln für schwache Ableitungen von $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ gelten. Nehmen Sie dafür an, dass die rechte Seite der Gleichung wohldefiniert ist und zeigen Sie, dass dann auch die linke Seite wohldefiniert ist und beide Seiten fast überall identisch sind.

a) $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}u = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}u$,

b) $\frac{\partial}{\partial x_i}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \frac{\partial}{\partial x_i}u + c_2 \frac{\partial}{\partial x_i}v$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

c) $\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi v) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) v + \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)$ für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**:** Seien $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie die Funktion

$$u(x,y) := f(x) + g(y) \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ liegt und, dass für $\alpha = (1,0)$ und $\beta = (0,1)$

$$D^{\alpha+\beta}u \equiv 0 \text{ fast überall in } \mathbb{R}^2.$$

Die schwachen Ableitungen von u zu den Multiindizes α und β müssen jedoch nicht existieren. Damit haben wir gezeigt, dass die Existenz der m-ten schwachen Ableitung nicht die Existenz aller Ableitungen der Ordnung $\leq m-1$ impliziert.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $1 \leq p < q < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$C^1(\overline{\Omega}) \subsetneqq W^{1,q}(\Omega) \subsetneqq W^{1,p}(\Omega) \subsetneqq L^p(\Omega)$$

als Menge und als stetige Einbettung. Um $A \subsetneqq B$ für $A, B \in \{C^1(\overline{\Omega}), W^{1,q}(\Omega), W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)\}$ zu zeigen, müssen Sie

a) beweisen, dass $A \subset B$ als Menge und es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|a\|_B \leq C\|a\|_A$ für alle $a \in A$,

b) ein Ω und ein Element $b \in B$ finden, sodass $b \notin A$.

Aufgabe 4: Für welche $p \in [1, \infty]$ und welche $k \in \mathbb{N}$ ist $f(x) := \max(0, 1 - x^2)$ in $W^{k,p}(-2,2)$?

Aufgabe 5 (4+4 Punkte)**:** Sei $\beta > 0$ und betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\beta} \qquad \text{für } x \in B_1(0) \backslash \{0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

a) Für welche β existieren die schwachen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)$ und $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x)$ in $B_1(0)$?

b) Sei $p \in (1,2)$. Für welche β gilt $f \in W^{1,p}(B_1(0))$?

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_n > 0, \\ 0 & \text{für } x_n \leq 0 \end{cases}$$

für kein $p \in [1, \infty]$ in $W^{1,p}(B_1(0))$ liegt.

Aufgabe 7: Betrachten Sie das offene Quadrat $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$ und die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{wenn } x_1 > 0, |x_2| < x_1, \\ 1 + x_1 & \text{wenn } x_1 < 0, |x_2| < -x_1, \\ 1 - x_2 & \text{wenn } x_2 > 0, |x_1| < x_2, \\ 1 + x_2 & \text{wenn } x_2 < 0, |x_1| < -x_2. \end{cases}$$

Existieren die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ und $\frac{\partial}{\partial x_2} u$ im schwachen Sinne in Ω?

Aufgabe 8 (2 Punkte)**:** Sei $1 \leq p < \infty$ und φ_ε der Friedrichssche Glätter. Zeigen Sie, dass für $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$D^\alpha(f * \varphi_\varepsilon) = (D^\alpha f) * \varphi_\varepsilon \qquad \text{für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k.$$

Daraus folgt, dass sich alle $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen durch glatte Funktionen in der $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Norm approximieren lassen.

Aufgabe 9: a) Zeigen Sie, dass das zweite Hauptlemma der Variationsrechnung auch für $L^1_{loc}(\Omega)$-Funktionen gilt: Wenn $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und alle schwachen Ableitungen erster Ordnung existieren und verschwinden, also

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ und } i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt $f \equiv c$ fast überall für ein $c \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f \in C([a,b])$ mit schwacher Ableitung $g \in C([a,b])$. Zeigen Sie, dass dann f im klassischen Sinne differenzierbar ist mit Ableitung g.