Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **WS 2019/2020**

Variationsrechnung

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 28.11.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Wir betrachten den Raum $X = W^{2,2}((0,1)) \cap W_0^{1,2}((0,1))$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ definiert durch

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 u''(x)^2 dx}$$

in X äquivalent zur Standard-$W^{2,2}((0,1))$-Norm ist. Dafür müssen Sie die Existenz einer Konstanten $C > 0$ beweisen, sodass

$$\frac{1}{C}\|u\|_{W^{2,2}((0,1))} \leq \|u\| \leq C\|u\|_{W^{2,2}((0,1))} \text{ für alle } u \in X.$$

Sie dürfen dabei verwenden, dass $C^2([0,1]) \cap C_0([0,1])$ dicht in X liegt.

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes, beschränktes Gebiet und $\lambda \leq 0$. Betrachten Sie das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = \lambda u(x) + f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = |\nabla u(x)| = 0 & \text{für } x \in \Omega. \end{cases}$$

Die Funktion $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ ist eine schwache Lösung dieses Problems wenn

$$\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x) - \lambda u(x)v(x) - f(x)v(x)dx = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{2,2}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass dieses Problem eine eindeutige schwache Lösung besitzt, indem Sie

a) beweisen, dass

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\right)^2 dx = \int_\Omega (\Delta u(x))^2 dx \text{ für alle } u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{2,2}(\Omega)$ liegt, ist die Aussage auch für alle $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ erfüllt.

b) beweisen, dass $\|\cdot\|_*$ definiert durch $\|u\|_* := \left(\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$ in $W_0^{2,2}(\Omega)$ äquivalent zu der folgenden Norm ist:

$$\left(\langle\langle u,u\rangle\rangle_{W^{2,2}(\Omega)}\right)^{1/2} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x)\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

c) begründen wieso aus b) und dem Darstellungssatz von Riesz folgt, dass es eine eindeutige schwache Lösung zu dem Randwertproblem gibt.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**:** Seien $g \in C^\infty([0,1])$ mit $g \geq 0$ und $f \in W^{k,2}((0,1))$ mit $k \in \mathbb{N}^+$. Wir suchen eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}((0,1))$ der Differentialgleichung

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u(x) = f(x) & \text{für } x \in (0,1), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \{0,1\}. \end{cases} \tag{1}$$

a) Stellen Sie die schwache Formulierung des Problems (1) auf und begründen Sie, dass das Problem eine schwache Lösung besitzt.

b) Zeigen Sie, dass $u \in W^{k+2,2}((0,1)) \cap W_0^{1,2}((0,1))$.

Aufgabe 4: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in L^2(\Omega)$. Geben Sie die schwache Formulierung der folgenden Randwertprobleme an und zeigen Sie, dass sie im Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung besitzen.

a) Laplace Gleichung:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

b) Konvektions-Diffusions-Gleichung:

$$\begin{cases} -\Delta u + a \cdot \nabla u = f & \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, die $\nabla \cdot a(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**:** Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $C_P > 0$ so, dass $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir betrachten das folgende Funktional

$$J(u) = \int_\Omega \left(h_1(x) \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1} u(x) \right)^2 + h_2(x) \left(\tfrac{\partial}{\partial x_2} u(x) \right)^2 + 2 \tfrac{\partial}{\partial x_1} u(x) \tfrac{\partial}{\partial x_2} u(x) - \frac{1}{3C_P} u(x) - f(x)u(x) \right) dx$$

mit $h_1, h_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h_1(x) = \frac{3}{2 - |x|^2} \qquad \text{und} \qquad h_2(x) = e^{2 - x_1 x_2}.$$

Zeigen Sie, dass J genau ein Minimum $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 6: Sei $(H, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ ein Hilbertraum mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm. Seien $x, y \in H$.

a) Zeigen Sie die Parallelogramm-Gleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right).$$