Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 05.12.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3+2+3 Punkte)**:** Für Lebesgue-messbare Funktionen $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei $\tilde{u}$ definiert durch $\tilde{u} = u$ auf Ω und $\tilde{u} = 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Man definiert den Träger von u durch

$$\operatorname{support}(u) = \mathbb{R}^n \backslash \left(\bigcup w_i \right), \tag{1}$$

wobei w_i offene Mengen sind für die $u = 0$ f.ü. in w_i. Falls u stetig ist, gilt

$$\operatorname{support}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass für $u \in C(\Omega)$ die Definitionen (1) und (2) übereinstimmen.

b) Sei $\Omega = (0, 1)$. Geben Sie zwei Funktionen $u_1, u_2 \in L^1(\Omega)$ an, mit $u_1 = u_2$ f.ü., sodass Definition (2) für u_1 und u_2 unterschiedliche Ergebnisse liefert.

c) Zeigen Sie, dass Definition (1) für $L^1(\Omega)$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 2: Seien $a, b > 0$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Zeigen Sie die Ungleichung von Young:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Wann gilt Gleichheit?
Hinweis: Nutzen Sie die Konvexität der Exponentialfunktion.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ folgendes gilt:

$$ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2.$$

Aufgabe 3: Wir definieren für $u \in C_b^1(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C_0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$(E_1 u)(x_1, x_2) := \begin{cases} u(x_1, x_2) & \text{für } x_2 \geq 0, \\ -u(x_1, -x_2) & \text{für } x_2 < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $E_1 u \in C_b^1(\mathbb{R}^2)$ und, dass $E_1 : C_b^1(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C_0(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \to C_b^1(\mathbb{R}^2)$ ein Fortsetzungsoperator ist.

Aufgabe 4: Seien $p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}^+$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^k$. Zeigen Sie, dass der Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ liegt.
Hinweis: Verwenden Sie einen Fortsetzungsoperator, Approximation mit Friedrichs und Aufgabe 8 von Blatt 6.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)**:** Sei $u \in C^1([0,1])$.

a) Definieren Sie zwei beschränkte lineare Operatoren $E_1 : C^1([0,1]) \to C^1([-1,0])$ und $E_2 : C^1([0,1]) \to C^1([1,2])$, sodass $\tilde{u} : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} (E_1 u)(x) & \text{für } x \in [-1,0), \\ u(x) & \text{für } x \in [0,1], \\ (E_2 u)(x) & \text{für } x \in (1,2] \end{cases}$$

in $C^1([-1,2])$ liegt.

b) Zeigen sie, dass dann

$$E(u)(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ (E_1 u)(x)\chi(x + \frac{1}{2}) & \text{für } x \in [-1,0), \\ u(x) & \text{für } x \in [0,1], \\ (E_2 u)(x)\chi(\frac{3}{2} - x) & \text{für } x \in (1,2], \\ 0 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

ein Fortsetzungsoperator von $C^1([0,1])$ nach $C_c^1(\mathbb{R})$ ist. Hier ist $\chi = \varphi_{\frac{1}{4}} * H$ die Faltung des Friedrichsschen Glätters mit der Heaviside Funktion.

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)**:** Sei $M \in \mathbb{N}^+$ und $\varepsilon \in (0,1)$. Finden Sie eine Zerlegung der Eins auf $(-M, M) \subset \mathbb{R}$ zu der offenen Überdeckung $\{(k-1-\varepsilon, k+1+\varepsilon)\}_{k=-M}^{M}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Finden Sie eine Funktion $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{support}(\varphi_0) = [-1,1]$ und $0 \leq \varphi_0(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

b) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Finden Sie Funktionen $\psi_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{support}(\psi_k) = [k-1, k+1]$ und $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$\sum_{k=-M}^{M} \psi_k(x) = 1 \text{ für alle } x \in [-M, M].$$

Aufgabe 7: Sei $\Omega = (0,1)^2$. Da Ω beschränkt ist und $\partial\Omega \in C^0$ existiert ein Fortsetzungsoperator $E_0 : C([0,1]^2) \to C_b(\mathbb{R}^2)$. Konstruieren Sie einen solchen Fortsetzungsoperator.