Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

WS 2019/2020

Variationsrechnung

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Variationsrechnung (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 12.12.2019, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $p \in (1, n)$. Analog zu Aufgabe 4 von Blatt 6 kann man zeigen, dass die Funktion f gegeben durch $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\beta}$ für $x \in B_1(0)\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ in $W^{1,p}(B_1(0))$ liegt für alle $\beta < \frac{n}{p} - 1$. Zeigen Sie mithilfe dieses Ergebnisses, dass das Korollar zur Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung über die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ optimal ist: Finden Sie für $q > \frac{np}{n-p}$ eine Funktion, die in $W^{1,p}(B_1(0))$ liegt, nicht aber in $L^q(B_1(0))$.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$.

a) Sei $m \in \mathbb{N}^+$ und $p \in [1, \frac{n}{m})$. Leiten Sie mithilfe des Korollars zur Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung die folgende Einbettung her:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-mp}}(\Omega).$$

b) Sei $p \in \left(\frac{n}{2}, n\right)$. Leiten Sie mithilfe des Korollars zu Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung und des Einbettungssatzes von Morrey her, dass

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n-p}{p}}(\overline{\Omega}).$$

Aufgabe 3: Auch ohne die Beweise der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev- und Morrey-Ungleichung zu kennen, kann man sich schnell überlegen, dass in den Ungleichungen nur bestimmte Werte für p, q und γ in Frage kommen:

a) Seien $p, q \in [1, \infty)$. Angenommen es gibt eine Konstante $C_1 > 0$, sodass

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, dass dann $q = \frac{np}{n-p}$ und $p < n$ gelten muss.

b) Sei $p \in [1, \infty)$ und $\gamma \in (0, 1)$. Angenommen es existiert eine Konstante $C_2 > 0$, sodass

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \text{ für alle } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, dass dann $p > n$ und $\gamma \leq 1 - \frac{n}{p}$ gelten muss.

Hinweis: Wählen Sie $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ und betrachten Sie die Funktionen $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 4: Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Zeigen Sie mit der Hölder-Ungleichung, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $a_1, \dots a_{n-1} \in C([a,b])$ gilt:

$$\int_a^b |a_1(x)|^{\frac{1}{n-1}} \dots |a_{n-1}(x)|^{\frac{1}{n-1}} dx \leq \left(\int_a^b |a_1(x)| dx\right)^{\frac{1}{n-1}} \dots \left(\int_a^b |a_{n-1}(x)| dx\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

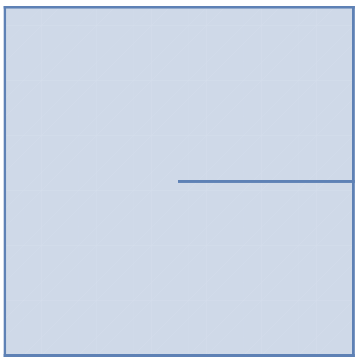
Aufgabe 5: Sei $\Omega = (0,1)$ und $p \in (1,\infty)$. Zeigen Sie, dass der Einbettungssatz von Morrey optimal ist. Sei dafür $q > 1 - \frac{1}{p}$ und finden sie eine Funktion $f \in W^{1,p}((0,1))$, die nicht Hölder-stetig mit Hölder Konstante q ist, also $f \notin C^{0,q}([0,1])$.

Aufgabe 6 (6+2 Punkte)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Man könnte vermuten, dass $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ gilt. Dies ist jedoch für $n \geq 2$ nicht der Fall.

a) Man kann zeigen, dass $W^{1,n}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ als Mengen nicht erfüllt ist. Betrachten Sie dafür $\Omega = B_{\frac{1}{4}}(0) \subset \mathbb{R}^n$ und die Funktion $f : B_{\frac{1}{4}}(0) \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = \log\left(\log\left(\frac{1}{\|x\|}\right)\right) \quad \text{für } x \neq 0.$$
Zeigen Sie, dass $f \in W^{1,n}\left(B_{\frac{1}{4}}(0)\right)$, aber $f \notin L^\infty\left(B_{\frac{1}{4}}(0)\right)$.

b) Zeigen Sie, dass als Menge
$$W^{1,n}(\Omega) \subset \bigcap_{p \in [1,\infty)} L^p(\Omega).$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)**:** Der Einbettungssatz von Morrey sagt aus, dass für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ gilt, dass
$$W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega}).$$
Wenn $\partial\Omega \notin C^1$ ist dies nicht der Fall. Geben Sie ein Beispiel für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\partial\Omega \notin C^1$ sowie eine Funktion $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ an, sodass u nicht Lipschitz-stetig auf Ω ist. Zeigen Sie dies.
Hinweis: Nehmen Sie $\Omega = (-1,1)^2 \backslash ([0,1) \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ *und*
$$u(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x_1) & \textit{für } x_1, x_2 > 0, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$
mit geeignetem $\tilde{u}$.



Aufgabe 8: Betrachten Sie das Gebiet aus Aufgabe 7 und sei $p > 2$. Zeigen Sie, dass es keinen Fortsetzungsoperator $E_1 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ gibt.