SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (a) Es sei $A \in \mathrm{U}(n)$ eine unitäre Matrix mit der Eigenschaft, daß $A - E$ invertierbar ist. Zeigen Sie, daß die Matrix $B := \mathrm{i}(A+E)(A-E)^{-1}$ hermitesch ist, d.h. $B^* = B$.

(b) Zeigen sie umgekehrt: Ist $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, so ist $B - \mathrm{i}E$ invertierbar, die Matrix $A := (B + \mathrm{i}E)(B - \mathrm{i}E)^{-1}$ ist unitär, und 1 ist kein Eigenwert von A.

Bemerkung: Die Abbildung $z \mapsto \mathrm{i}(z+1)(z-1)^{-1}$ bildet $S^1 \setminus \{1\}$, wobei $S^1 \subset \mathbb{C}$ den Einheitskreis bezeichnet, bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab; die Umkehrabbildung ist $w \mapsto (w+\mathrm{i})(w-\mathrm{i})^{-1}$. Die obigen Aussagen sind die Matrix-Entsprechung dieser Beobachtung: wie in der Vorlesung gesehen gilt $\mathrm{U}(1) = S^1$, und die hermiteschen (1×1)-Matrizen sind genau $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{C}^{1\times 1}$.

Abbildungen der Form $z \mapsto (az+b)(cz+d)^{-1}$ auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ oder auf der um einen Punkt ∞ erweiterten komplexen Zahlenebene heißen **Möbiustransformationen** und spielen eine wichtige Rolle etwa in der Funktionentheorie und der hyperbolischen Geometrie.

Aufgabe 2. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen oder unitären Vektorraumes.

(a) Angenommen, f bildet den Einheitsball

$$B := \{v \in V\colon\ |v| \leq 1\}$$

auf sich ab, d.h. $f(B) = B$. Zeigen Sie, daß f eine Isometrie ist.

Bemerkung: Man könnte hier mit analytisch-topologischen Begriffen (Rand, Stetigkeit, ...) argumentieren. Besser und einfacher geht es aber mit einem rein linear-algebraischen Argument.

(b) Sei f invertierbar, und es gelte

$$|f^{-1}(v)| = |f(v)| \quad \text{für alle } v \in V.$$

Ist f dann stets eine Isometrie? Beweisen Sie die Aussage, oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3. Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Gegeben seien ein Vektor $v \in V$ mit $|v| = 1$, und eine reelle bzw. komplexe Zahl b. Zeigen Sie, daß es genau dann eine Isometrie f von V mit $\langle f(v), v\rangle = b$ gibt, wenn $|b| \leq 1$.

Aufgabe 4. (a) Teilen Sie mit Rest in $\mathbb{R}[x]$:

(i) $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 5x + 6$ durch $x^2 - 3x + 1$,
(ii) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ durch $x - 1$.

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome in $\mathbb{R}[x]$:

(i) $x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1$ und $3x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x + 7$,
(ii) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ und $x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 9x + 5$.

b.w.

Bonusaufgabe. In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns noch einmal mit dem Minimalpolynom und der Diagonalisierbarkeit von Matrizen.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^k - \lambda$ paarweise verschieden sind.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix mit der Eigenschaft, daß für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ die Matrix A^k diagonalisierbar ist. Zeigen Sie, daß dann auch A selbst diagonalisierbar ist.

Bonusaufgabe. In dieser Aufgabe diskutieren wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß die durch eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definierte quadratische Form

$$q_A\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\mathtt{t}} A x \end{array}$$

positiv definit ist.

Für $k = 1, \ldots, n$ heißen die Determinanten

$$\delta_k := \det\Big((a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\Big)$$

die **Hauptminoren** von A.

Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz ist q_A genau dann positiv definit, wenn eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ existiert, so daß $TAT^{\mathtt{t}} = E_n$, wobei E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

(a) Angenommen, q_A is positiv definit. Was kann man über die Einschränkung von q_A auf den durch die ersten k Koordinaten definierten Unterraum $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ aussagen? Folgern Sie, daß $\delta_k > 0$.

(b) Sei umgekehrt angenommen, daß alle Hauptminoren von A positiv sind. Wir wollen mittels Induktion nach der Dimension n zeigen, daß q_A positiv definit ist.

Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Sei also $n > 1$ und die Aussage für $n - 1$ schon gezeigt. Schreiben Sie die Matrix A in der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & b \\ \hline b^{\mathtt{t}} & c \end{array}\right)$$

mit $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ (als Spaltenvektor gelesen) und $c \in \mathbb{R}$.

(i) Begründen Sie, warum eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$ existiert mit $SBS^{\mathtt{t}} = E_{n-1}$.

(ii) Setzen Sie

$$T := \left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline -b^{\mathtt{t}} B^{-1} & 1 \end{array}\right),$$

und berechnen Sie $TAT^{\mathtt{t}}$. Folgern Sie, daß A positiv definit ist. Wie muß man T anpassen, damit $TAT^{\mathtt{t}} = E_n$?

Abgabe: Mittwoch 29.5.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).