a182

Approximatiestellingen

Oktober 1989

Prof.dr. Ph. Clément / dr. G. Sweers

2253057000006
plu 057

TU Delft
Technische Universiteit Delft

Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica
Vakgroep Algemene Wiskunde

APPROXIMATIESTELLINGEN

(Voorheen: dictaat bij
College Voortgezette Analyse I
a 182 deel II)

Technische Universiteit Delft
Fac. der Tech. Wisk. & Inf.
Julianalaan 132
2628 BL Delft

Prof.dr. Ph. Clément
Dr. G. Sweers

April 1988 (versie 25–10–89)

A. UNIFORME BENADERING VAN CONTINUE FUNCTIES.

1. CONTINUE FUNCTIES BENADEREN DOOR DIFFERENTIEERBARE FUNCTIES.

Zij u een continue functie op $\mathbb{R}$; notatie $u \in C(\mathbb{R})$. Dan is $v(t) = \int_0^t u(s)ds$ een differentieerbare functie op $\mathbb{R}$ en

$$\frac{dv}{dt}(t) = u(t) \quad \text{voor } t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Dus v is continu differentieerbaar op $\mathbb{R}$. Dat wil zeggen v, $\frac{dv}{dt} \in C(\mathbb{R})$; notatie $v \in C^1(\mathbb{R})$.

Definieer voor $h > 0$ het differentiequotiënt van v:

$$u_h(t) := h^{-1}(v(t+h)-v(t)) \quad \text{voor } t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Dan geldt $u_h \in C^1(\mathbb{R})$ en uit (1.1) volgt dat

$$\lim_{h \downarrow 0} u_h(t) = u(t) \quad \text{voor } t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

De functierij $\{u_{1/n}\}_{n \geq 1}$ bestaat dus uit continu differentieerbare functies die u puntsgewijs benaderen.

We laten de afschatting nog even zien. Omdat

$$u_h(t) = h^{-1} \int_t^{t+h} u(s)ds = h^{-1} \int_0^h u(t+s)ds \tag{1.4}$$

geldt

$$|u_h(t) - u(t)| = |h^{-1} \int_0^h u(t+s)ds - h^{-1} \int_0^h u(t)ds| \leq \tag{1.5}$$

$$\leq h^{-1} \int_0^h |u(t+s) - u(t)|ds \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq s \leq h} |u(t+s) - u(t)| = \max_{0 \leq s \leq h} |u(t+s) - u(t)|.$$

Voor de laatste stap gebruiken we [A] en het feit dat $s \to |u(t+s) - u(t)|$ continu is. De convergentie volgt uit de continuïteit van u.

We kunnen zelfs laten zien dat de rij $\{u_{1/n}\}_{n \geq 1}$ uniform naar u convergeert op ieder begrensd interval van $\mathbb{R}$. (Uniforme convergentie wordt gedefinieerd in [A].) Zij [a,b] het interval. Op het interval [a,b+1] is de functie u uniform continu, zie [A]. Dus voor iedere $\epsilon > 0$ is er $\delta \in (0,1]$ zodat $|u(s+t) - u(t)| \leq \epsilon$ voor alle $s \in [0,\delta]$ en $t \in [a,b]$.

Met behulp van (1.5) is er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta \in (0,1]$ zodat

(1.6) $|u_{1/n}(t) - u(t)| \leq \epsilon$ voor $n \geq \delta^{-1}$ en $t \in [a,b]$.

Dat wil zeggen

(1.7) $\max_{t \in [a,b]} |u_{1/n}(t) - u(t)| \leq \epsilon$ als $n \geq \delta^{-1}$.

Hiermee is de uniforme convergentie van $\{u_{1/n}\}_{n \geq 1}$ op een begrensd en gesloten interval van $\mathbb{R}$ bewezen.

Merk op dat een functie $u \in C(\mathbb{R})$ met behulp van [A] uniform continu is op een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}$, in het bijzonder op een gesloten en begrensd interval [a,b]. Maar dan is u ook uniform continu op het open interval (a,b). Dus $\{u_{1/n}\}_{n \geq 1}$ convergeert uniform naar u op een begrensd interval van $\mathbb{R}$.

Opgave 1.

Zij u een begrensde uniform continue functie op $\mathbb{R}$; notatie $u \in BUC(\mathbb{R})$. Zij $h > 0$ en definieer $u_h(t) = h^{-1} \int_0^h u(t+s)ds$.

a) Laat zien u_h en $(u_h)' \in BUC(\mathbb{R})$.

b) Laat zien $\lim_{h \downarrow 0} \|u_h - u\|_\infty = 0$, waarbij $\|\cdot\|_\infty$ is gedefinieerd voor $v \in B(\mathbb{R})$ door $\|v\|_\infty = \sup \{|v(x)|; x \in \mathbb{R}\}$ (zie [A]).

Opgave 2.

Neem $u(x) = \sin x^2$.

Laat zien dat $\{u_{1/n}\}_{n \geq 1}$ de functie u niet uniform benadert op $\mathbb{R}$.

Opgave 3.

Zij $u \in C(\mathbb{R})$ en $h > 0$.

Definieer $\tilde{u}_h(t) = (2h)^{-1} \int_{-h}^h u(t+s)ds$.

a) Laat zien $\tilde{u}_h \in C^1(\mathbb{R})$.

b) Laat zien $\lim_{h \downarrow 0} \max_{a \leq t \leq b} |\tilde{u}_h(t) - u(t)| = 0$ voor alle $a < b$ in $\mathbb{R}$.

We beschouwen nu $u \in C^1(\mathbb{R})$. Zij u_h als in (1.4). Dan geldt $u_h \in C^1(\mathbb{R})$. Omdat $(u_h)'(t) = h^{-1}(u(t+h)-u(t))$ geldt ook $(u_h)' \in C^1(\mathbb{R})$. Dus is u_h tweemaal continu differentieerbaar op $\mathbb{R}$; notatie $u_h \in C^2(\mathbb{R})$. Bovendien geldt

$$(1.8) \qquad (u')_h(t) = h^{-1} \int_t^{t+h} u'(s)ds = h^{-1}(u(t+h)-u(t)) = (u_h)'(t).$$

Hieruit volgt dat de rij $\{(u_{1/n})'\}_{n\geq 1}$ van de afgeleiden van $u_{1/n}$ uniform naar de afgeleide van u convergeert op een begrensd interval van $\mathbb{R}$.

(Zoals we al gezien hebben convergeert $\{u_{1/n}\}_{n\geq 1}$ uniform naar u op een begrensd interval van $\mathbb{R}$.)

Omdat u continu differentieerbaar is convergeert $\{u_{1/n}\}_{n\geq 1}$ met een zekere orde van convergentie. Immers met behulp van (1.5) en de middelwaardestelling:

$$(1.9) \qquad |u_h(t) - u(t)| \leq h^{-1} \int_0^h |u(t+s) - u(t)|ds \leq$$

$$\leq h^{-1} \int_0^h s\,ds \max_{0\leq\sigma\leq h} |u'(t+\sigma)| = \frac{1}{2} \max_{0\leq\sigma\leq h} |u'(t+\sigma)|h$$

Dus $|u_h(t) - u(t)| = O(h)$ als $h \downarrow 0$ (uniform in t op een begrensd interval in $\mathbb{R}$).

We laten nu zien dat de rij $\{u_{1/n}\}_{n\geq 0}$ niet "sneller" dan O(h) naar u convergeert. Neem namelijk de functie $u(t) = t$. Dan geldt

$u_h(t) = h^{-1} \int_0^h (t+s)ds = t + \frac{1}{2}h$. Dus $h^{-1}(u_h(t)-u(t)) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Opgave 4.

Zij $u \in C^1(\mathbb{R})$

a) Laat zien $\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(u_h(t)-u(t)) = \frac{1}{2}u'(t)$.

b) Laat zien dat $h^{-1}(u_h-u)$ voor $h \downarrow 0$ uniform naar $\frac{1}{2}u'$ convergeert op een begrensd interval van $\mathbb{R}$.

c) Als $|u_h(t) - u(t)| = o(h)$ voor $h \downarrow 0$ voor alle $t \in [a,b]$ wat kun je dan zeggen van u?

Opgave 5.

Zij $u \in C(\mathbb{R})$ en $h > 0$. Definieer $\tilde{u}_h$ zoals in opgave 3.

a) Laat zien dat voor $u \in C^1(\mathbb{R})$ geldt dat $|\tilde{u}_h(t) - u(t)| = O(h)$ voor $h \downarrow 0$ uniform voor t in een begrensd interval.

b) Laat zien dat voor $u \in C^2(\mathbb{R})$ geldt dat $|\tilde{u}_h(t) - u(t)| = O(h^2)$ voor $h \downarrow 0$ uniform voor t in een begrensd interval.

c) Laat zien dat $\tilde{u}_h$ voor $u \in C^2(\mathbb{R})$ niet "sneller" convergeert.

We beëindigen deze paragraaf met het karakteriseren van de klasse van continue functies op $\mathbb{R}$ waarvoor geldt:

Er is een $M > 0$ zodat

(1.10) $$|u_h(t) - u(t)| \leq Mh \text{ voor alle } t \in \mathbb{R}$$

(d.w.z. de klasse van continue functies op $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $\|u_h - u\|_\infty = O(h)$ voor $h \downarrow 0$).

Als $|u(t) - u(s)| \leq M|t - s|$ voor alle $t,s \in \mathbb{R}$ dan volgt uit (1.5) dat

(1.11) $$|u_h(t) - u(t)| \leq Mh^{-1} \int_0^h s\, ds = \frac{M}{2} h\,.$$

Omgekeerd, neem aan dat (1.10) geldt. Dan volgt met (1.4) dat

(1.12) $$|(u_h)_k(t) - u_k(t)| \leq k^{-1} \int_0^k |u_h(t+s) - u(t+s)|\, ds \leq Mh \quad \text{voor alle } h,k > 0.$$

Bovendien geldt

(1.13) $$(u_h)_k(t) = h^{-1}k^{-1} \int_0^k \int_0^h u(t+s+r)dr\, ds =$$
$$= h^{-1}k^{-1} \int_0^h \int_0^k u(t+s+r)ds\, dr = (u_k)_h(t).$$

Samen leveren (1.12) en (1.13) dat

(1.14) $$|(u_k)_h(t) - u_k(t)| \leq Mh \quad \text{voor } h,k > 0.$$

Noem $u_k = v$. Omdat $v \in C^1(\mathbb{R})$ vinden we met behulp van opgave 4 dat $|\frac{1}{2} v'(t)| \leq M$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Uit (1.4) volgt dan $v'(t) = (u_k)'(t) = k^{-1}(u(t+k)-u(t))$ zodat

(1.15) $$|u(t+k) - u(t)| \leq 2Mk \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R} \text{ en } k > 0.$$

Een equivalente formulering met $L = 2M$ is

(1.16) $$|u(s) - u(t)| \leq L|s-t| \quad \text{voor alle } s,t \in \mathbb{R}.$$

Opmerking.
Een functie die aan (1.16) voldoet heet uniform Lipschitz–continu.

De resultaten uit deze paragraaf vatten we samen in:

Propositie 1.1.

Zij $u \in C(\mathbb{R})$ en $h > 0$. Definieer $u_h(t) = h^{-1} \int_0^h u(t+s)ds$. Dan

i) $u_h \in C^1(\mathbb{R})$,

ii) $u_h \to u$ voor $h \downarrow 0$ uniform op begrensde intervallen in $\mathbb{R}$,

iii) $\max_{a \le t \le b} |u_h(t)| \le \max_{a \le t \le b+h} |u(t)|$.

Als bovendien geldt dat $u \in C^1(\mathbb{R})$ dan

iv) $(u_h)' = (u')_h$,

v) $(u_h)' \to u'$ voor $h \downarrow 0$ uniform op begrensde intervallen in $\mathbb{R}$,

vi) $\max_{a \le t \le b} |u_h(t) - u(t)| \le \frac{1}{2} \max_{a \le t \le b+h} |u'(t)| h$.

Voor $u \in C(\mathbb{R})$ zijn de volgende twee uitspraken equivalent:

a) $|u_h(t) - u(t)| \le Mh$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$,

b) $|u(t) - u(s)| \le 2M|t-s|$ voor alle $t,s \in \mathbb{R}$.

2. CONTINUE FUNCTIES OP [a,b] BENADEREN DOOR MEERDERE MALEN DIFFERENTIEERBARE FUNCTIES.

Zij $u \in C[a,b]$. Definieer $v \in C(\mathbb{R})$ door

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} v(x) = u(a) & \text{als } x < a, \\ v(x) = u(x) & \text{als } a \le x \le b, \\ v(x) = u(b) & \text{als } b < x. \end{cases}$$

Dan geldt $v \in BUC(\mathbb{R})$ (zie opgave 1) en v_h (gedefinieerd door (1.4)) convergeert uniform voor $h \downarrow 0$ naar v op $[a,b]$.

Noem $u_h = v_h|_{[a,b]}$ (de restrictie van v_h tot $[a,b]$). Dan is u_h de restrictie op $[a,b]$ van een continu differentieerbare functie op $\mathbb{R}$ en $\lim_{h \downarrow 0} u_h = u$ uniform op $[a,b]$.

Definitie 2.1.

Zij $a,b \in \mathbb{R}$ met $a < b$.

i) $C^1(a,b) = \{u \in C(a,b);$ u is differentieerbaar op (a,b) en $u' \in C(a,b)\}$

ii) $C^1[a,b] = \{u \in C[a,b];$ er is een $v \in C^1(\mathbb{R})$ zodat $u(x) = v(x)$ voor $x \in [a,b]\}$

Opmerking 1.

$C^1(a,b)$ en $C^1[a,b]$ zijn respectievelijk lineaire deelruimten van de vectorruimten $C(a,b)$ en $C[a,b]$.

Opmerking 2.

$C^1(a,b) \neq \{u \in C(a,b);$ er is een $v \in C^1(\mathbb{R})$ met $u(x) = v(x)$ op $(a,b)\}$.

Opmerking 3.

Als $u \in C^1[a,b]$ dan $u|_{(a,b)} \in C^1(a,b)$. Bovendien bestaan $\lim_{x \downarrow a} u'(x)$ en $\lim_{x \uparrow b} u'(x)$. Als restrictie van een functie $v' \in C(\mathbb{R})$ is u' uniform continu op (a,b).

Opgave 6.

Zij $u(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x}$ voor $x \in (0,1]$ en $u(0) = 0$.

a) Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt $u|_{(0,1)} \in C^1(0,1)$?

b) Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt $u \in C^1[0,1]$?

Propositie 2.2.

Zij $v \in C^1(a,b)$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

i) v is de restrictie tot (a,b) van een (en slechts één) functie $u \in C^1[a,b]$,

ii) $\lim_{x \downarrow a} v'(x)$ en $\lim_{x \uparrow b} v'(x)$ bestaan,

iii) v' is uniform continu op (a,b).

Bewijs.

i) ⇒ ii) v is de restrictie van een functie $u \in C^1(\mathbb{R})$.

ii) ⇒ iii) Definieer de functie $z : [a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$(2.2)\qquad \begin{cases} z(a) = \lim\limits_{t \downarrow a} v'(t) \\ z(t) = v'(t) \quad \text{voor } t \in (a,b) \\ z(b) = \lim\limits_{t \uparrow b} v'(t) \end{cases}$$

De functie z is continu op [a,b] en volgens [A] en [A] dus uniform continu.

iii) ⇒ i) Zij $\{t_n\}_{n\geq 1}$ een rij in (a,b) met $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$. $\{t_n\}_{n\geq 1}$ is een Cauchyrij en omdat v' uniform continu is, is volgens [A] $v'(t_n)$ ook een Cauchyrij. Omdat $\mathbb{R}$ volledig is bestaat $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} v'(t_n)$.

Zelfs voor iedere rij $\{s_n\}_{n\geq 1}$ in (a,b) met $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} v'(s_n) = \alpha$. Immers $\{v'(s_1), v'(t_1), v'(s_2), v'(t_2), \ldots\}$ is een Cauchyrij waarvan een deelrij (en dus de rij zelf) naar α convergeert.

Dus $\lim\limits_{h \downarrow 0} v'(a+h) = \alpha$. Op dezelfde wijze bestaat $\lim\limits_{h \downarrow 0} v'(b-h) = \beta$. Definieer $w \in C(\mathbb{R})$ door

$$(2.3)\qquad \begin{cases} w(t) = \alpha & \text{voor } t \leq a, \\ w(t) = v'(t) & \text{voor } a < t < b. \\ w(t) = \beta & \text{voor } b \leq t. \end{cases}$$

Definieer vervolgens $\tilde{u} \in C^1(\mathbb{R})$ door

$$(2.4)\qquad \tilde{u}(t) = v\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{t} w(s)ds.$$

Merk op dat $\tilde{u}|_{(a,b)} = v$. Definieer $u \in C^1_{[a,b]}$ door $u = \tilde{u}|_{[a,b]}$. □

Opgave 7.

Laat zien $u \in C^1[a,b]$ dan en slechts dan als er $v \in C[a,b]$ bestaat met

$$(2.5)\qquad u(t) - u(s) = \int_s^t v(\tau)d\tau \text{ voor alle } t,s \in [a,b].$$

(er is ten hoogste één $v \in C[a,b]$ die hieraan voldoet).

We schrijven $v = u'$.

Definitie 2.3.

Zij $a,b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $m \in \{2,3,4,\ldots\}$.

$C^m(\mathbb{R}) = \{u \in C^{m-1}(\mathbb{R})$; waarvoor tevens geldt $u' \in C^{m-1}(\mathbb{R})\}$,

$C^m(a,b) = \{u \in C^{m-1}(a,b)$; waarvoor tevens geldt $u' \in C^{m-1}(a,b)\}$,

$C^m[a,b] = \{u \in C^{m-1}[a,b]$; waarvoor tevens geldt $u' \in C^{m-1}[a,b]\}$,

$C^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{n\geq 1} C^n(\mathbb{R})$,

$C^\infty(a,b) = \bigcap_{n\geq 1} C^n(a,b)$,

$C^\infty[a,b] = \bigcap_{n\geq 1} C^n[a,b]$.

Opgave 8. Laat zien:

a) $u \in C^m[a,b]$ d.e.s.d. als u de restrictie van een $v \in C^m(\mathbb{R})$ is,

b) $u \in C^m(a,b)$ is de restrictie van een $v \in C^m[a,b]$ d.e.s.d. als $u^{(m)}$ uniform continu is op (a,b),

c) $u \in C^m[a,b]$ d.e.s.d. als er $v \in C[a,b]$, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$, $s_0 \in (a,b)$ zijn zodat geldt

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \frac{(t-s_0)^k}{k!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_{s_0}^{t} (t-\tau)^{m-1} v(\tau)\,d\tau. \tag{2.6}$$

Propositie 2.4.

Voor alle $m \in \mathbb{N}^+$ ligt $C^m[a,b]$ dicht in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

(Voor $u \in C[a,b]$ is $\|\cdot\|_\infty$ gedefinieerd door $\|u\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b} |u(t)|$).

Bewijs.

Volgens [A] en [A] is het voldoende te bewijzen dat voor iedere $u \in C[a,b]$ en $\epsilon > 0$ er een $v \in C^m[a,b]$ bestaat met $\|u-v\|_\infty \leq \epsilon$. Voor $m=1$ is dit bewezen in propositie 1.1. Voor $m > 1$ gebruiken we volledige inductie.

Stel propositie 2.4 is waar voor $m-1$. Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er $v_1 \in C^{m-1}[a,b]$ met $\|u-v_1\|_\infty \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Dan is er ook een $v_2 \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ met $v_2|_{[a,b]} = v_1$. Definieer $(v_2)_h$ als in (1.4) zodat geldt $(v_2)_h \in C^m[a,b]$ voor $h > 0$.

Voor h voldoende klein geldt (zie b.v (1.9)) dat $\|(v_2)_h - v_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\epsilon$, Tesamen:

$$\|(v_2)_h - u\|_\infty \leq \|(v_2)_h - v_2\|_\infty + \|v_2 - u\|_\infty \leq \epsilon. \tag{2.7}$$

□

Zoals bekend is de ruimte $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ een Banachruimte, zie [A].

Voor $m = 1,2,\ldots$ zijn $(C^m[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ dichte echte deelruimten van $(C[a,b],\|.\|_\infty)$. Dus is $(C^m[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ niet volledig.

Er zijn natuurlijke normen op $C^m[a,b]$ waarmee $C^m[a,b]$ volledig is.

Definitie 2.5.

Voor $m = 1,2,\ldots$ en $u \in C^m[a,b]$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{i=0}^{m} \|u^{(i)}\|_\infty. \tag{2.8}$$

($u^{(i)}$ is de i–de afgeleide van u).

Propositie 2.6.

$(C^m[a,b],\|\cdot\|_{m,\infty})$ is een Banachruimte.

Bewijs. Zij $\{u_n\}_{n\geq 1}$ een Cauchyrij in $(C^m[a,b],\|\cdot\|_{m,\infty})$. Dat wil zeggen: voor iedere $\epsilon > 0$ is er een $N_1 \in \mathbb{N}$ zodat

$$\sum_{k=0}^{m} \|u_p^{(k)} - u_q^{(k)}\|_\infty < \epsilon \text{ voor } p,q > N_1. \tag{2.9}$$

De rijen $\{u_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$ voor $k = 0,\ldots,m$ zijn Cauchyrijen in $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ en dus convergent. Definieer $v_k = \lim_{n\to\infty} u_n^{(k)} \in C[a,b]$. Omdat $u \to \|u\|_\infty$ continu is geldt

$$\sum_{k=0}^{m} \|u_p^{(k)} - v_k\|_\infty = \sum_{k=0}^{m} \|u_p^{(k)} - \lim_{n\to\infty} u_n^{(k)}\|_\infty = \tag{2.10}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \|u_p^{(k)} - u_n^{(k)}\|_\infty < \epsilon \text{ voor } p > N_1.$$

Het is voldoende om te bewijzen dat

$$v_k = (v_0)^{(k)} \text{ voor } k = 1,\ldots,m. \tag{2.11}$$

Dit is een gevolg van

Lemma 2.7.

Zij $f_n \in C^1[a,b]$, $n = 1,2,\ldots$, en zij $f, g \in C[a,b]$. Als

i) $f_n \to f$ puntsgewijs op $[a,b]$,

ii) $f_n' \to g$ uniform op $[a,b]$,

dan geldt f is differentieerbaar op $[a,b]$ en $f' = g$.

Opgave 9.

Laat zien dat voor f_n en f uit lemma 2.7 geldt dat $f_n \to f$ uniform op $[a,b]$.

Bewijs lemma 2.7.

Neem $t \in (a,b)$. Wij hebben

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f_n'(s)ds \quad n = 1,2,\ldots . \tag{2.12}$$

Volgens [A] geldt $f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)ds$.

Dan is f differentieerbaar en $f' = g$. □

Opmerking 1.

$C^1[a,b]$ is volledig t.o.v. de norm $\|\cdot\|_{1,\infty}$ en niet volledig t.o.v. de norm $\|\cdot\|_\infty$. Dus zijn beide normen niet equivalent.

Opmerking 2.

Voor $u \in C^1[a,b]$ geldt

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_{1,\infty}$$

Opgave 10.

Bewijs dat $C^{m+k}[a,b]$ dicht ligt in $(C^m[a,b], \|\cdot\|_{m,\infty})$ $k = 1,2,\ldots$.

3. CONTINUE FUNCTIES OP [a,b] BENADEREN DOOR POLYNOMEN; DE APPROXIMATIESTELLING VAN WEIERSTRASS.

In de vorige paragrafen is te zien dat continue functies op [a,b] in de supremum–norm te benaderen zijn door meerdere malen differentieerbare functies. Een natuurlijke vraag is: zijn ze te benaderen door oneindig vaak differentieerbare of zelfs analytische functies? We zullen laten zien dat continue functies zelfs te benaderen zijn door polynomen.

Opmerking.

Zelfs als de functie oneindig vaak differentieerbaar is op [–1,1] dan hoeft de rij van Taylorpolynomen niet naar de functie te convergeren.

Voorbeelden.

a) $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

De Taylorreeks rond 0 is dan $u(x) = 1-x^2+x^4-x^6+\ldots$.

Deze reeks convergeert niet in 1 en –1.

b) $\begin{cases} u(x) = 0 & \text{voor } x \in [-1,0] \\ u(x) = e^{-1/x} & \text{voor } x \in (0,1] \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{n} u^k(0) \dfrac{x^k}{k!} = 0$ voor alle n.

Men zou kunnen denken dat de polynomen van de Lagrange–interpolatie continue functies uniform benaderen. Het werd door Runge als eerste bewezen dat deze rij polynomen niet altijd uniform convergeert. Bijvoorbeeld op [–5,5] met $u(x) = (1+x^2)^{-1}$ en als steunpunten $x_k = -5 + \dfrac{10k}{n}$ $k = 0,1,\ldots,n$ liet Runge zien dat de Lagrange interpolatie polynomen divergeren voor $|x| > 3.63\ldots$.

Weierstrass bewees in 1885 als eerste dat $P[0,1] := \{p : [0,1] \to \mathbb{R};\ p \text{ polynoom}\}$ dicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ligt. Bernstein heeft in 1912 een expliciete rij polynomen geconstrueerd die uniform naar een continue functie op [0,1] convergeert.

Definitie 3.1.

Voor $u \in C[0,1]$ en $n \in \mathbb{N}^+$ stel

$$(B_n u)(x) := \sum_{k=0}^{n} u(k/n)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \quad x \in [0,1] \text{ met } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3.1}$$

Merk op dat $B_n u$ een polynoom is met graad kleiner of gelijk aan n.

Stelling 3.2. (S. Bernstein)

Voor alle $u \in C[0,1]$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |(B_n u)(x) - u(x)| = 0. \tag{3.2}$$

Gevolg 3.3. (Weierstrass)

Voor iedere continue functie $u \in C[a,b]$ en $\epsilon > 0$ bestaat er een polynoom p zodat

$$\max_{x\in[a,b]} |u(x) - p(x)| \leq \epsilon. \tag{3.3}$$

(Dit gevolg wordt bewezen met behulp van een herschaling).

Bewijs van stelling 3.2.

Merk allereerst op dat

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1. \tag{3.4}$$

Zij $u \in C[0,1]$. Dan geldt zoals in de eerste paragraaf

$$(B_n u)(x) - u(x) = \tag{3.5}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} u(k/n)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} u(x)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (u(k/n) - u(x))\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

Zodat

$$|(B_n u)(x) - u(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |u(k/n) - u(x)|\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}. \tag{3.6}$$

Wegens de uniforme continuïteit van u op [0,1], is er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden zodat voor $|x-y| \leq \delta$ geldt dat $|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Als $|x - y| > \delta$ dan geldt

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\|u\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty \delta^{-2}|x-y|^2.$$

Dan geldt voor alle x, y $\in [0,1]$ dat:

$$|u(x) - u(y)| \leq \tfrac{1}{2}\epsilon + 2\|u\|_\infty \delta^{-2}(x-y)^2$$

en dus kunnen we (3.6) vervolgen met

(3.7) $$|(B_n u)(x) - u(x)| \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\epsilon + 2\|u\|_\infty \delta^{-2}(x^2 - \tfrac{2}{n}x \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}).$$

Uit $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ volgt na differentiatie naar x en vermenigvuldiging met x dat

(3.8) $$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Nogmaals dezelfde procedure levert

(3.9) $$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Neem $y = 1-x$ en vervolg (3.7)

(3.10) $$|(B_n u)(x) - u(x)| \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\epsilon + 2\|u\|_\infty \delta^{-2}(x^2 - 2x^2 + \tfrac{1}{n}x + \tfrac{n-1}{n}x^2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\epsilon + 2\|u\|_\infty \delta^{-2} n^{-1} x(1-x) \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\|u\|_\infty \delta^{-2} n^{-1}$$

Zodat voor $n \geq \|u\|_\infty \delta^{-2} \epsilon^{-1}$ geldt dat

(3.11) $$\|(B_n u) - u\|_\infty \leq \epsilon$$ □

Opgave 11.

Zij $u \in B([0,1];\mathbb{R})$ zodat voor een $x_0 \in (0,1)$ geldt dat $u''(x_0)$ bestaat. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} n(B_n u(x_0) - u(x_0)) = \frac{1}{2}x_0(1-x_0)u''(x_0)$.

Opgave 12.

Zij $u, v \in C[a,b]$ zodanig dat $\int_a^b u(t)t^n dt = \int_a^b v(t)\, t^n\, dt$ voor $n = 0,1,\ldots$. Laat zien dat $u = v$.

(Hint: polynomen liggen dicht in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Opgave 13.

a) Zij $u \in BC(0,\infty)$, d.w.z. begrensd en continu op $(0,\infty)$. Neem aan dat $\int_0^\infty e^{-pt}u(t)dt = 0$ voor alle $p > 0$.

Laat zien dat $u(t) = 0$ voor alle $t > 0$. (Hint: stel $s = e^{-t}$ en gebruik partiële integratie).

b) Zij $u \in C[0,\infty)$ zodat $\int_0^\infty |u(t)|dt < \infty$ en $\int_0^\infty e^{-pt}u(t)dt = 0$ voor alle $p > 0$.

Laat zien dat $u(t) = 0$ voor alle $t > 0$.

4. CONTINUE FUNCTIES BENADEREN DOOR GONIOMETRISCHE FUNCTIES.

In de vorige paragraaf hebben we laten zien dat continue functies op [0,1] uniform te benaderen zijn door polynomen. Een natuurlijke vraag lijkt dan: zijn continue functies te benaderen door functies van de vorm

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n_2} b_k \sin kt. \tag{4.1}$$

Een functie g van deze vorm is periodiek met periode 2π. We beschouwen daarom 2π–periodieke functies.

Definitie 4.1.

Zij $m \in \mathbb{N}$.

$$C^m_{2\pi} = \{ u \in C^m(\mathbb{R});\ u(t+2\pi) = u(t) \text{ voor alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

$$G_{2\pi} = \{g \in C(\mathbb{R});\ \text{er zijn } n_1, n_2 \in \mathbb{N} \text{ en } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ zodat}$$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n_2} b_k \sin kt \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Opgave 14.

Laat zien $(C^m_{2\pi}, \|\cdot\|_{m,\infty})$ is een Banachruimte voor iedere $m \in \mathbb{N}$ (vergelijk propositie 2.6).

Opgave 15.

Zij $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een polynoom:

$$p(x,y) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{M} a_{k\ell} x^k y^\ell.$$

a) Laat zien dat er voor iedere $g \in G_{2\pi}$ een polynoom p zoals bovenstaand is, met $g(t) = p(\cos t, \sin t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(Hint: gebruik $e^{it} = \cos t + i \sin t$).

b) Zij $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als boven. Laat zien dat g, gedefinieerd door $g(t) = p(\cos t, \sin t)$, een element van $G_{2\pi}$ is. (Hint: inductie naar M + N).

Vandaar dat de functies uit $G_{2\pi}$ goniometrische polynomen (met periode 2π) genoemd worden.

Stelling 4.2. (Goniometrische vorm van de stelling van Weierstrass)

$G_{2\pi}$ ligt dicht in $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$.

Gevolg 4.3.

Zij $T \in (0,2\pi)$ en definieer $\tilde{G} \subset C[0,T]$ door $\tilde{G} = \{u \in C[0,T]$; er is $g \in G_{2\pi}$ met $u = g|_{[0,T]}\}$. $\tilde{G}$ ligt dicht in $(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$.

Opgave 16.

Bewijs gevolg 4.3.

Bewijs van stelling 4.2.

i) We zullen eerst laten zien dat iedere reële continue functie w op $[-1,1] \times [-1,1]$, $(w \in C[-1,1]^2)$, te benaderen is door een polynoom op $[-1,1]^2$. Hiervoor gebruiken we het resultaat van Bernstein. Zij $v \in C[-1,1]$ en definieer $\tilde{B}_n v$ door

(4.2) $$(\tilde{B}_n v)(x) = (B_n \tilde{v})(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}) \text{ met } x \in [-1,1] \text{ en } \tilde{v}(x) = v(2x-1),\ x \in [0,1].$$

Dan $\tilde{v}, (B_n \tilde{v}) \in C[0,1]$ en $(\tilde{B}_n v) \in C[-1,1]$. $\tilde{B}_n v$ is zelfs een polynoom op $[-1,1]$ en de rij $\{\tilde{B}_n v\}_{n \geq 1}$ convergeert uniform naar v voor $n \to \infty$.

Zij $w \in C([-1,1]^2)$ en $\epsilon > 0$. Definieer $w_n \in C([-1,1]^2)$ door

(4.3) $$w_n(x,y) = (\tilde{B}_n w(\cdot,y))(x).$$

Dan geldt voor iedere $y \in [-1,1]$ dat

(4.4) $$\|w_n(\cdot,y) - w(\cdot,y)\|_\infty \to 0 \text{ voor } n \to \infty.$$

Omdat w uniform continu is kunnen we zelfs bewijzen dat (zie bewijs van stelling 3.2)

(4.5) $$\|w_n - w\|_\infty := \sup_{y\in[0,1]} \|w_n(\cdot,y) - w(\cdot,y)\|_\infty \to 0 \text{ voor } n \to \infty.$$

Neem $n_1 \in \mathbb{N}$ zo groot dat geldt

(4.6) $$\|w_{n_1} - w\|_\infty \leq \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

Definieer vervolgens $W_n \in C([-1,1]^2)$ door

(4.7) $$W_n(x,y) = (\tilde{B}_n w_{n_1}(x,\cdot))(y).$$

Opnieuw kunnen we een $n_2 \in \mathbb{N}$ vinden zodat

(4.8) $$\|W_{n_2} - w_{n_1}\|_\infty \leq \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

De functie W_{n_2} is een polynoom op $[-1,1]^2$ en

$$\|W_{n_2} - w\|_\infty \leq \|W_{n_2} - w_{n_1}\|_\infty + \|w_{n_1} - w\|_\infty \leq \epsilon.$$

ii) Zij $u \in C_{2\pi}$. We definieren de functie $f \in C([0,\infty)\times\mathbb{R})$ door

(4.9) $$f(r,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{voor } r = 0 \\ r\,u(\theta) & \text{voor } r > 0 \end{cases}$$

Vervolgens definiëren we $w \in C(\mathbb{R}^2)$ door

(4.10) $$w(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(r,\theta) \quad r > 0 \quad \theta \in [0,2\pi).$$

De functie $w|_{[-1,1]\times[-1,1]}$ is volgens i) uniform te benaderen met polynomen, m.a.w. voor alle $\epsilon > 0$ is er een polynoom p op $[-1,1]^2$ met

(4.11) $$|p(x,y) - w(x,y)| \leq \epsilon \text{ voor alle } (x,y) \in [-1,1]^2.$$

Maar dan geldt ook, omdat $w(\cos\theta,\sin\theta) = f(1,\theta) = u(\theta)$, dat

(4.12) $$|p(\cos\theta,\sin\theta) - u(\theta)| \leq \epsilon \text{ voor alle } \theta \in [0,2\pi]. \qquad \square$$

Gevolg 4.4.

Zij $u \in C_{2\pi}$ met

(4.13) $$\int_0^{2\pi} u(t) \sin kt\, dt = \int_0^{2\pi} u(t) \cos kt\, dt = 0 \text{ voor alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dan geldt $u = 0$.

Opgave 17.

Zij $u \in C[0,2\pi]$ zodat u voldoet aan (4.13). Laat zien dat ook nu geldt dat $u = 0$.

Gevolg 4.5 (Weyl).

Zij $u \in C_{2\pi}$ en $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Definieer voor $N \in \mathbb{N}^+$

$$\varphi_N(u) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} u(2k\pi\theta). \tag{4.14}$$

Dan $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t)dt$.

Bewijs.

i) We zullen dit gevolg eerst bewijzen voor $u \in G_{2\pi}$. We kunnen rekenwerk besparen door direct met functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$ te werken. Een 2π–periodieke goniometrische polynoom p is te schrijven als $p(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$.

Definieer de functie $e_k \in G_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ door

$$e_k(t) = e^{ikt} \tag{4.15}$$

Omdat

$$\varphi_N(\alpha u+\beta v) = \alpha\varphi_N(u) + \beta\varphi_N(v) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ u, v \in C_{2\pi} \tag{4.16}$$

is het voldoende $\varphi_N(e_k)$ te kennen:

$$\begin{cases} \varphi_N(e_0) = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1 \\ \varphi_N(e_k) = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2nk\pi\theta i} \quad \text{voor } k \neq 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Dit laatste is een meetkundige rij en dus

$$\varphi_N(e_k) = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{2k\pi\theta i})^n = N^{-1} \frac{1-(e^{2k\pi\theta i})^N}{1-e^{2k\pi\theta i}}. \tag{4.18}$$

Omdat $\theta \notin \mathbb{Q}$ geldt $e^{2k\pi\theta i} \neq 1$ zodat voor $k \neq 0$

$$\lim_{N\to\infty} |\varphi_N(e_k)| \leq \lim_{N\to\infty} N^{-1} \frac{2}{|1-e^{2k\pi\theta i}|} = 0. \tag{4.19}$$

Hieruit volgt inderdaad

$$(4.20)\qquad \begin{cases} \lim_{N\to\infty} \varphi_N(e_0) = 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_0(t)dt \\ \lim_{N\to\infty} \varphi_N(e_k) = 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(t)dt \quad \text{voor } k \neq 0. \end{cases}$$

Gebruik makend van (4.16) volgt voor $g \in G_{2\pi}$ dat

$$(4.21)\qquad \lim_{N\to\infty} \varphi_N(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt.$$

ii) Vervolgens gebruiken we dat $G_{2\pi}$ dicht ligt in $(C_{2\pi}, \|\cdot\|)$.

Zij $u,v \in C_{2\pi}$, dan volgt uit (4.16)

$$(4.22)\qquad |\varphi_N(u) - \varphi_N(v)| = |\varphi_N(u-v)| =$$

$$= N^{-1}\Big|\sum_{k=0}^{N-1} u(2k\pi\theta) - v(2k\pi\theta)\Big| \leq$$

$$\leq N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} \|u-v\|_\infty = \|u-v\|_\infty .$$

Voor de integraal geldt iets soortgelijks:

$$(4.23)\qquad \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)dt\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t)-v(t)|dt = \|u-v\|_\infty .$$

Zij nu $u \in C_{2\pi}$ en $\epsilon > 0$. Neem $g \in G_{2\pi}$ zodat $\|u-g\|_\infty < \frac{1}{4}\epsilon$. Dan volgt uit (4.22) en (4.23) dat

$$(4.24)\qquad |\varphi_N(u) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)dt| \leq$$

$$\leq |\varphi_N(u) - \varphi_N(g)| + |\varphi_N(g) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt| + \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)dt\Big| \leq$$

$$\leq 2\|u-g\|_\infty + |\varphi_N(g) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt| \leq \epsilon$$

indien N zo groot gekozen wordt dat

$$(4.25)\qquad |\varphi_N(g) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)dt| \leq \frac{1}{2}\epsilon.$$

Dat dit mogelijk is volgt uit (4.21). □

In het tweede deel van deze paragraaf zullen we een methode laten zien waarbij we een functie in $C_{2\pi}$ benaderen met goniometrische polynomen. We zullen in dit deel complexwaardige functies beschouwen.

Definieer voor $u \in C_{2\pi}$ constanten $\hat{u}(k)$ met $k \in \mathbb{Z}$ door

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}u(t)dt \tag{4.26}$$

Voor $g \in G_{2\pi}$ geldt voor N groot genoeg dat

$$g(t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{g}(k)e^{ikt} \tag{4.27}$$

Immers uit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}dt = \delta_{k\ell} \quad \text{voor } k,\ell \in \mathbb{Z}$$

($\delta_{kk} = 1$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$; $\delta_{\ell k} = 0$ voor $\ell \neq k$) volgt voor $g(t) = \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikt}$ dat

$$\sum_{k=-N}^{N} (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}g(t)dt)e^{ikt} = \tag{4.28}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} \sum_{\ell=-M}^{M} c_\ell e^{i\ell t}dt)e^{ikt} =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} (\sum_{\ell=-M}^{M} \delta_{k\ell}c_\ell)e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt} = g(t) \quad \text{voor } N \geq M.$$

De vraag blijft of $\sum_{k=-N}^{N} \hat{u}(k)e^{ikt}$ naar $u(t)$ convergeert voor $N \to \infty$ als $u \in C_{2\pi}$. Als afkorting zullen we schrijven

$$F_N(u)(t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{u}(k)e^{ikt}. \tag{4.29}$$

Propositie 4.6.

Als de rij partiële Fouriersommen $F_N(u)$ uniform naar een functie v convergeert dan geldt dat $u = v$.

Opmerking 1.

Omdat in propositie 4.6 de convergentie uniform is, is de functie v continu en dus $v \in C_{2\pi}$.

Bewijs.

Zij $\epsilon > 0$. Neem N_0 zo groot dat $\|F_N(u) - v\|_\infty \leq \epsilon$ voor $N \geq N_0$.

Zij $k \in \mathbb{Z}$. Dan geldt voor $N = \max(N_0, |k|)$ dat

$$|\hat{u}(k) - \hat{v}(k)| = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{\ell=-N}^{N} \hat{u}(\ell)e^{i(\ell-k)t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}v(t)dt| = \tag{4.30}$$

$$= \frac{1}{2\pi}|\int_0^{2\pi} (F_N(u)(t) - v(t))e^{-ikt}dt| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|F_N(u) - v\|_\infty dt \leq \epsilon$$

Dit geldt voor alle $\epsilon > 0$ dus $\hat{u}(k) = \hat{v}(k)$.

Uit gevolg 4.4 en het feit dat $u - v \in C_{2\pi}$ volgt $u = v$. □

Opmerking 2.

Indien u niet continu is in $[0,2\pi]$ of indien $u(0) \neq u(2\pi)$ convergeert $F_N(u)$ niet uniform naar u.

Opmerking 3.

De rij $F_N(u)$ kan voor niet–continue functies wel puntsgewijs naar u convergeren b.v.

$f_n(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots . \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos((2n+1)x)$ convergeert puntsgewijs naar de functie f gedefinieerd door

$$f(\tfrac{1}{2}\pi) = f(\tfrac{3}{2}\pi) = 0$$

$$f(x) = \tfrac{\pi}{4} \text{ voor } x \in [0,\tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{3}{2}\pi,2\pi]$$

$$f(x) = -\tfrac{\pi}{4} \text{ voor } x \in (\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{3}{2}\pi).$$

Opmerking 4

Continuïteit van u is echter ook niet voldoende voor uniforme convergentie van $F_N(u)$. Zie bladzijde 106 van W. Rudin, Real and Complex Analysis, 2nd edition McGraw–Hill Series in Higher Mathematics.

In het volgende deel van deze paragraaf zullen we een voldoende voorwaarde voor u geven zodat $F_N u$ uniform convergeert.

Hiervoor hebben we het volgende lemma nodig.

Lemma 4.7. (M–test van Weierstrass).

Zij $u_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ begrensd. Stel de rij $\|u_n\|_\infty \; (= \sup_{x\in[a,b]} |u_n(x)|)$ is sommeerbaar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_\infty < \infty. \tag{4.31}$$

Dan is er een begrensde functie $v : [a,b] \to \mathbb{C}$ zodat

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n(x) = v(x) \text{ uniform op } [a,b]. \tag{4.32}$$

Bewijs.

Definieer $v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_n(x)$.

Omdat $u_n(x)$ absoluut sommeerbaar is, is $u_n(x)$ sommeerbaar. Met andere woorden $v_n(x)$ convergeert. Definieer $v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x)$. Voor alle $x \in [a,b]$ geldt

$$|v_n(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |u_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty \text{ zodat ook } \|v\|_\infty < \infty. \tag{4.33}$$

Zij $\epsilon > 0$. Omdat $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty$ is er N zodat $\sum_{k=N}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \epsilon$ en dus voor $n > N$

$$|v(x) - v_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\Big| \le \tag{4.34}$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \epsilon \quad \text{voor alle } x \in [a,b]$$

In andere woorden: (4.32) geldt. □

Propositie 4.8.

Zij $a_k \in \mathbb{C}$ voor $k \in \mathbb{Z}$ zodat $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$. Dan geldt

i) de rij partiële Fouriersommen $\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$ convergeert uniform naar een 2π–periodieke continue functie u voor $N \to \infty$, en

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ikt} dt, \tag{4.35}$$

ii) als bovendien geldt dat $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k||a_k| < \infty$ dan is u continu differentieerbaar en

(4.36) $$ika_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(t)e^{-ikt}dt.$$

Bewijs

i) Definieer $w_n(t) = a_n e^{int}$. Met behulp van het vorige lemma en

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|w_n\|_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ is er een functie u (2π–periodiek) zodat

$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} w_n(t) = u(t)$ uniform op $[0,2\pi]$.

Omdat elke functie $\sum_{n=-N}^{N} w_n(t)$ continu is volgt uit de uniforme convergentie dat u continu is. (4.35) volgt uit propositie 4.6.

ii) Definieer $b_k = ik a_k$. Met behulp van deel i) is er een continue 2π–periodieke functie v zodat $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{ikt} = v(t)$ uniform voor $N \to \infty$. Definieer $s_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$.

Dan geldt

$$s_N \to u \quad \text{uniform op } \mathbb{R}$$

$$s_N' \to v \quad \text{uniform op } \mathbb{R}.$$

Uit lemma 2.7 volgt $u' = v$ en dus $v \in C^1_{2\pi}$, en (4.36). □

Opgave 18.

Zij $u \in C^m_{2\pi}$ met $m \in \mathbb{N}$.

a) Laat zien dat

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |k|^m |\hat{u}(k)| \le \|u^{(m)}\|_\infty.$$

b) Zij $m \ge 2$. Laat zien dat voor $N \to \infty$

$$F_N(u) \to u \text{ uniform.}$$

De Fourierreeks $\{F_N(u)\}_{N\ge 0}$ convergeert in het algemeen niet uniform voor iedere continue functie. We kunnen met behulp van de Fourierreeks echter wel een uniforme benaderingsmethode vinden. Hiervoor gebruiken we het zogeheten Cesaro–gemiddelde.

Lemma 4.9.

Zij $a, a_k \in \mathbb{C}$ voor $k \in \mathbb{N}$ zodat

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a.$$

Dan geldt ook

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k = a.$$

$\{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k\}_{N\in\mathbb{N}}$ heet de rij van Cesàro–gemiddelden van de rij $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Opgave 19.

Bewijs lemma 4.9.

Propositie 4.10. (Fejér)

Zij $u \in C_{2\pi}$ en zij $F_N(u)$ zoals in (4.29)(4.26):

$$F_N(u)(t) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iks} u(s)ds\, e^{ikt}.$$

Definieer $C_N(u)$ door

$$C_N(u)(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n(u)(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik(t-s)} u(s)ds.$$

Dan convergeert $C_N(u) \to u$ voor $N \to \infty$ uniform op $[0,2\pi]$.

Bewijs.

Gebruik makend van $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ voor $a \neq 1$ vinden we met wat rekenwerk dat

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} a^k = \frac{a^N - 2 + a^{-N}}{a - 2 + a^{-1}} \quad \text{voor } a \neq 1,\ a \neq 0.$$

Dan geldt voor $s \neq t \bmod 2\pi$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)} = \frac{1}{N} \frac{e^{iN(t-s)} - 2 + e^{-iN(t-s)}}{e^{i(t-s)} - 2 + e^{-i(t-s)}} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} N(t-s)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-s)}.$$

Voor $s = t \bmod 2\pi$ vinden we dat

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(2n+1) = N.$$

Met als gevolg

$$C_N(u)(t) = \frac{1}{2\pi N}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}N(t-s)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-s)}\, u(s)ds. \tag{4.38}$$

Merk op dat $\frac{\sin^2 \frac{1}{2}N(t-s)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-s)} \geq 0$ voor alle $t \neq s \bmod 2\pi$, en dat voor de constante functie $h \equiv 1$ geldt

$$C_N(h)(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n(h)(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1. \tag{4.39}$$

Dan geldt voor $u \in C_{2\pi}$ dat

$$|C_N(u)(t)| \leq \frac{1}{2\pi N}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}N(t-s)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-s)}\, |u(s)|ds \leq \tag{4.40}$$

$$\leq \|u\|_\infty \frac{1}{2\pi N}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}N(t-s)}{\sin^2 \frac{1}{2}(t-s)}\, 1\, ds = \|u\|_\infty,$$

dus ook

$$\|C_N(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty. \tag{4.41}$$

Na deze voorbereidingen kunnen we de uniforme convergentie bewijzen. Neem $u \in C_{2\pi}$ en zij $\epsilon > 0$. In de tweede paragraaf hebben we gezien dat de tweemaal continu differentieerbare functies, $C^2[0,2\pi]$ dicht liggen in $C[0,2\pi]$. Evenzo kunnen we laten zien dat $C^2_{2\pi}$ dicht ligt in $C_{2\pi}$ (gebruik $(u_h)_h$ gedefinieerd in (1.4)). Dat wil zeggen er is een functie $v \in C^2_{2\pi}$ met $\|u - v\|_\infty \leq \frac{1}{3}\epsilon$. Uit (4.41) volgt dan dat ook geldt

$$\|C_N(u) - C_N(v)\|_\infty = \|C_N(u-v)\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty \leq \tfrac{1}{3}\epsilon.$$

Uit opgave 18.b volgt dat

$$\|F_N(v) - v\|_\infty \to 0 \quad \text{voor } N \to \infty$$

zodat met behulp van lemma 4.9 ook geldt

$$\|C_N(v) - v\|_\infty \to 0 \text{ voor } N \to \infty.$$

Neem N zo groot dat $\|C_N(v) - v\| \leq \frac{1}{3}\epsilon$. Hiermee volgt

$$\|C_N(u) - u\|_\infty \leq \|C_N(u) - C_N(v)\|_\infty + \|C_N(v) - v\|_\infty + \|v - u\|_\infty \leq \epsilon \qquad \square$$

Opmerking: In plaats van $C^2_{2\pi}$ kunnen we ook $G_{2\pi}$ kiezen.

B. FOURIERREEKSEN EN INPRODUKTRUIMTEN.

Zij u een continue 2π–periodieke functie ($u \in C_{2\pi}$), zij $\{F_N(u)\}_{N\geq 0}$ de rij partiële Fouriersommen van u (zie Propositie 4.10), en zij $t \in \mathbb{R}$. Als $\lim_{N\to\infty} F_N(u)(t)$ bestaat dan $\lim_{N\to\infty} F_N(u)(t) = u(t)$. Immers, volgens Propositie 4.10 geldt $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_N(u)(t) = u(t)$ en volgens lemma 4.9 hebben we

$$\lim_{N\to\infty} F_N(u)(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_N(u)(t) = u(t) . \tag{1.1}$$

Het kan gebeuren dat $\lim_{N\to\infty} F_N(u)(t)$ niet bestaat (zie b.v. de referentie in opmerking 4 op blz. 20). In deze paragraaf zullen we onder andere aantonen dat de rij functies $\{F_N(u)\}_{N\in\mathbb{N}}$ voor $u \in C_{2\pi}$ (en zelfs voor een grotere klasse van functies u) altijd naar u convergeert t.o.v. de volgende norm

$$\|u\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

In andere woorden:

Stelling 1.1.

Zij $u \in C_{2\pi}$ en zij $\{F_N(u)\}_{N\geq 0}$ de rij partiële Fouriersommen van u. Dan geldt

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} |u(t) - F_N(u)(t)|^2 \, dt = 0.$$

We zullen zien dat deze stelling een direkt gevolg is van de "projectiestelling" in inproduktruimten en de approximatiestelling van Weierstrass voor periodieke functies. (Stelling 4.2 uit A).

Een inproduktruimte is een vectorruimte voorzien van een inprodukt.

Voor de definitie van een (reële of complexe) vectorruimte zie b.v. Strang, 'exercise 2.1.6', of Simmons bldz. 81, 191. We zullen de volgende notaties gebruiken:

$\mathcal{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ als lichaam, $(V,\mathcal{K})$ is een vectorruimte over $\mathcal{K}$.

Opgave 20.

Zij E een niet–lege verzameling. Stel $\mathcal{K}^E := \{u : E \to \mathcal{K} \mid u \text{ afbeelding}\}$.

Definieer op $\mathcal{K}^E$ de volgende bewerkingen:

(1.3) Voor $u, v \in \mathcal{K}^E$, $(u+v)(x) := u(x) + v(x)$, voor alle $x \in E$ (optelling in V).

(1.4) Voor $u \in \mathcal{K}^E$ en $\lambda \in \mathcal{K}$, $(\lambda u)(x) := \lambda u(x)$, voor alle $x \in E$. (scalaire vermenigvuldiging).

Laat zien dat $\mathcal{K}^E$ voorzien van deze twee bewerkingen een vectorruimte over $\mathcal{K}$ is.

Wat is de nulvector in $\mathcal{K}^E$?

Opgave 21.

Zij $(V,\mathcal{K})$ een vectorruimte over $\mathcal{K}$ en zij M een niet–lege deelverzameling van V.

Laat zien dat M een vectorruimte over $\mathcal{K}$, ten opzichte van de bewerkingen in $(V,\mathcal{K})$, dan en slechts dan als voor alle $u, v \in M$ en alle $\lambda \in \mathcal{K}$ geldt:

(1.5) $u + v \in M$ en $\lambda u \in M$.

Dan heet M een lineaire deelruimte van $(V,\mathcal{K})$.

Voorbeelden.

i) Een element $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ is van de vorm $u = (u(0),u(1),u(2),\ldots)$ met $u(i) \in \mathbb{C}$ voor $i \in \mathbb{N}$.

$u + v = (u(0)+v(0),u(1)+v(1),\ldots)$.

$\lambda u = (\lambda u(0),\lambda u(1),\ldots)$.

ii) Een element $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ is van de vorm $u = (\ldots,u(-1),u(0),u(1),\ldots)$.

iii) $\ell^\infty_{\mathbb{Z}} := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)| < \infty\}$

$\ell^2_{\mathbb{Z}} := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a(k)|^2 < \infty\}$

$\ell^2_{\mathbb{Z}}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ en van $\ell^\infty_{\mathbb{Z}}$.

v) $\ell^1_{\mathbb{Z}} := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a(k)| < \infty\}$ is

een lineaire deelruimte van $\ell^2_{\mathbb{Z}}$.

vi) $C_{2\pi}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

vii) $C^m[a,b]$ is een lineaire deelruimte van $C[a,b]$.

We geven nu de definitie van een inprodukt.

Definitie 1.2.

Zij $(V,\mathcal{K})$ een vectorruimte. Een inprodukt op $(V,\mathcal{K})$ is een afbeelding $< , > : V \times V \to \mathcal{K}$ die aan de volgende eisen voldoet:

I1) $\begin{cases} < u + v , w > = < u , w > + < v,w > \\ < \lambda u , w > = \lambda < u,w > \end{cases}$

voor alle $u, v, w \in V$ en $\lambda \in \mathcal{K}$.

I2) $< v,u > = \overline{< u,v >}$ (complex geconjugeerde) voor alle $u, v \in V$.

I3) $< u,u > \geq 0$ voor alle $u \in V$.

I4) $< u,u > = 0 \Rightarrow u = 0$ voor alle $u \in V$.

Opmerkingen.

i) Het standaard inprodukt op $\mathbb{R}^N$

$< x,y > := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ voldoet aan I1–I4.

ii) Het standaard inprodukt op $\mathbb{C}^N$

$< z,w > := \sum_{i=1}^{N} z_i \overline{w}_i$ voldoet aan I1–I4.

iii) Als $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, dan is $< u,u > = \overline{< u,u >}$ en $< u,u > \in \mathbb{R}$. Dus I3 is zinvol.

iv) $< u,\lambda v > = \overline{< \lambda v,u >} = \overline{\lambda < v,u >} = \overline{\lambda}\,\overline{< v,u >} = \overline{\lambda} < u,v > .$

Voorbeelden.

a) $V = \mathbb{R}^3$ en (a_{ij}) is een symmetrische positief definiete 3×3 matrix. Dan is

$< x,y > := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j$ een inprodukt op $\mathbb{R}^3$.

b) $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ en $V = \ell^2_{\mathbb{Z}}$. Dan is

$< u,v > := \sum_{K=-\infty}^{+\infty} u(k)\overline{v(k)}$ een inprodukt op V.

c) $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ en $V = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} \mid u \text{ continu}\}$. Dan is

$< u,v > := \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)v(t)dt$ een inprodukt op V.

d) $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ en $V = \{u : [a,b] \to \mathbb{C} \mid u \text{ continu}\}$. Dan is

$< u,v > := \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)\overline{v(t)}dt$ een inprodukt op V.

e) Zij $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ en zij w een positieve continue functie op [a,b]. Dan is

$< u,v > := \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)\overline{v(t)}w(t)dt$ een inprodukt op $V = \{u : [a,b] \to \mathbb{C} \mid u \text{ continu}\}$.

f) Zij $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ en $V = C_{2\pi}$. Dan is

$< u,v > := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t)\overline{v(t)}dt$ een inprodukt op V.

Stelling 1.3.

De ongelijkheid van Cauchy–Schwarz.

Zij V een vectorruimte over $\mathcal{K}$ en zij $< , > : V \times V \to \mathcal{K}$ een afbeelding die aan de eisen I1, I2, I3 voldoet. Dan geldt

(1.6) $\quad |< u,v >|^2 \leq < u,u > < v,v >$ voor alle $u, v \in V$.

Bewijs.

Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en $u, v \in V$ geldt:

$< \lambda u+v, \lambda u+v > \geq 0$ dus

$\lambda^2 < u,u > + 2\lambda \operatorname{Re} < u,v > + < v,v > \geq 0$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hieruit volgt

$$|\operatorname{Re} < u,v > |^2 \leq < u,u > < v,v > .$$

Als $< u,v > = 0$ dan is men klaar.

Indien $< u,v > \neq 0$ dan definieer $w = < u,v >^{-1} u$. Nu volgt

$$1 = |\operatorname{Re} < w,v > |^2 \leq \frac{< u,u > < v,v >}{< u,v > \overline{< u,v >}} \text{ en dus}$$

$$|< u,v >|^2 = < u,v > \overline{< u,v >} \leq < u,u > < v,v > .$$

Opgave 22.

Zij $(V,\mathcal{K},<,>)$ een inproduktruimte.

Stel $\|u\| := < u,u >^{\frac{1}{2}}$. Laat zien

a) $\quad \|\cdot\|$ is een norm op V.

b) $\quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$ (parallellogramwet).

Opgave 23.

Zij $(V,\mathbb{C},<,>)$ een inproduktruimte.

Laat zien:

a) V is ook een vectorruimte over $\mathbb{R}$.

b) $\mathrm{Re} < , >$ is een inprodukt op $(V,\mathbb{R})$.

c) $< , >$ is geen inprodukt op $(V,\mathbb{R})$, behalve als $V = \{0\}$.

d) $\|\cdot\|$ gedefinieerd door $\|u\| = < u,u >^{\frac{1}{2}}$ is wel een norm op $(V,\mathbb{R})$.

Een inproduktruimte $(V,\mathbb{R},<,>)$ voorzien van de norm $\|u\| = < u,u >^{\frac{1}{2}}$ is dus een genormeerde ruimte en dus ook een metrische ruimte. [Zie A].

We beschouwen nu de complexe vectorruimte $C_{2\pi} = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid u \text{ continu en } 2\pi\text{–periodiek}\}$ voorzien van het inprodukt

$$< u,v > := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\overline{v(t)}dt. \tag{1.7}$$

Voor $k \in \mathbb{Z}$, stel

$$e_k(t) := e^{ikt},\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Dan geldt $\hat{u}(k) = < u,e_k >$ en voor $N \in \mathbb{N}$

$$F_N(u) = \sum_{K=-N}^{N} < u,e_k > e_k\ . \tag{1.9}$$

Bovendien geldt:

$$< e_k,e_\ell > = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}dt = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 \text{ als } k = \ell \\ 0 \text{ als } k \neq \ell \end{cases} \tag{1.10}$$

en $\|u\|_2 := (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ is een norm op $C_{2\pi}$.

In analogie met $\mathbb{R}^N$ voorzien van het standaard inprodukt zeggen we dat $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ een orthonormaal stelsel vormt. Op dezelfde wijze hebben we:

Definitie 1.4. (Orthogonaliteit).

Zij $(V,\mathbb{K},<,>)$ een inproduktruimte.

i) Laat $u, v \in V$. u staat loodrecht op v (notatie: $u \perp v$) als $< u,v > = 0$.

Merk op $u \perp v \Leftrightarrow v \perp u$ en $u \perp v$ impliceert $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (stelling van Pythagoras).

ii) Laat A een niet–lege deelverzameling van V zijn. Het orthogonale complement van A is de verzameling $A^{\perp}$ gedefinieerd door $A^{\perp} = \{ u \in V \mid < u,v > = 0$ voor alle $v \in A\}$.

iii) Een stelsel vectoren $\{e_k\}_{k\in I}$ heet een orthonormaal stelsel als voor alle $k, \ell \in I$ geld $< e_k, e_\ell > = \delta_{k\ell}$.

Opgave 24.

Zij $A \subset V$, $A \neq \phi$. Laat zien:

a) $A \subset A^{\perp\perp}$ en $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.

b) $A^{\perp}$ is een gesloten lineaire deelruimte van V. (gesloten t.o.v. de geïnduceerde metriek).

We geven nu een vorm van de projectiestelling in inproduktruimten.

Stelling 1.5.

Zij $(V,\mathcal{K},<,>)$ een inproduktruimte en zij $\{e_1,\ldots,e_n\}$ een eindig orthonormaal stelsel van V.

Stel $M := \{ v \in V \mid v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ met $\lambda_i \in \mathbb{C} \}$. Dan geldt:

a) M is een lineaire deelruimte van V en $\{e_k\}_{1\leq k\leq n}$ vormt een orthonormale basis van de n–dimensionale inproduktruimte $(M,\mathcal{K},<,>)$.

b) Voor iedere $u \in V$ stel

(1.11) $$u_M = \sum_{i=1}^{n} < u,e_i > e_i \, .$$

Dan geldt

i) $u - u_M \in M^{\perp}$.

ii) $\|u_M\|^2 + \|u-u_M\|^2 = \|u\|^2$.

iii) $\|u-u_M\| \leq \|u-v\|$ voor alle $v \in M$.

iv) Als $\tilde{u} \in M$ voldoet aan $\|u-\tilde{u}\| \leq \|u-v\|$ voor alle $v \in M$ dan geldt $\tilde{u} = u_M$.

(v) $\|u_M\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |< u,e_i >|^2$.

Bewijs.

a) Zij $u, v \in M$ en $\lambda \in \mathcal{K}$. Dan zijn er λ_i en μ_i in $\mathcal{K}$ zodat $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ en $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$.

Dan geldt $\lambda u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu_i) e_i$.

Volgens opgave 21 is M een lineaire deelruimte van V.

Per definitie is $\operatorname{span}_{1 \le k \le n} \{e_k\} = M$ en de vectoren $\{e_k\}_{1 \le k \le n}$ zijn lineair onafhankelijk.

Immers uit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \tag{1.12}$$

volgt $$0 = < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < e_i, e_j > = \lambda_j, \text{ voor } 1 \le j \le n. \tag{1.13}$$ Dus $\{e_k\}_{1 \le k \le n}$ vormt een basis van M, en dim M = n.

b) i) Zij $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$. Dan

$$< u - u_M, v > = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j < u - u_M, e_j > .$$

Voor $1 \le j \le n$ geldt:

$$< u - u_M, e_j > = < u, e_j > - < u_M, e_j > =$$

$$= < u, e_j > - \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > < e_i, e_j > = < u, e_j > - < u, e_j > = 0.$$

Dus $u - u_M \in M^{\perp}$.

ii) Uit (i) volgt:

$u - u_M \perp u_M$ dus

$$\|u\|^2 = \|u - u_M + u_M\|^2 = \|u - u_M\|^2 + \|u_M\|^2 .$$

iii) Uit (i) volgt met $v \in M$

$u - u_M \perp u_M - v$ dus

$$\|u - v\|^2 = \|u - u_M + u_M - v\|^2 = \|u - u_M\|^2 + \|u_M - v\|^2 \ge \|u - u_M\|^2 .$$

iv) Voor i = 1,...,n geldt

$$\|u - \tilde{u} + \lambda e_i\|^2 \ge \|u - \tilde{u}\|^2 \text{ voor alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Omdat $\|u - \tilde{u} + \lambda e_i\|^2 = \|u - \tilde{u}\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} < u - \tilde{u}, e_i > + \lambda^2$ volgt

$\operatorname{Re} < u - \tilde{u}, e_i > = 0$. Als $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $\|u - \tilde{u} + i\lambda e_i\|^2 \ge \|u - \tilde{u}\|^2$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt $\operatorname{Im} < u - \tilde{u}, e_i > = 0$, dus $< u - \tilde{u}, e_i > = 0$ $i = 1,...,n$.

Uit $\tilde{u} \in M$ volgt $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ met $\lambda_i \in \mathcal{K}$, en omdat $< e_i, e_j > = \delta_{ij}$ geldt $\lambda_i = < u, e_i >$.

Hieruit verkrijgt men $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i = u_M$.

v) $\|u_M\|^2 = < \sum_{i=1}^{n} < u, e_i > e_i, \sum_{j=1}^{n} < u, e_j > e_j > =$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} < u, e_i > \overline{< u, e_j >} < e_i, e_j > = \sum_{i=1}^{n} | < u, e_i > |^2$. □

Gevolg 1.6.

i) $V = M \oplus M^{\perp}$ d.w.z.

$V = M + M^{\perp} = \{ u \in V \mid u = u_1 + u_2, u_1 \in M, u_2 \in M^{\perp} \}$ en $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

u_M is dus de orthogonale projektie van u op M.

ii) $\|u_M\| \leq \|u\|$.

We zijn nu in staat om de stelling 1.1 te bewijzen.

Bewijs van stelling 1.1.

Zij $u \in C_{2\pi}$ en $N \in \mathbb{N}$.

Stel $V_N := \{ v \in C_{2\pi} \mid v = \sum_{K=-N}^{N} \lambda_k e_k$ met $\lambda_k \in \mathbb{C} \}$. Volgens de projectiestelling geldt:

(1.14) $\|u - F_N u\|_2 \leq \|u - v\|_2$ voor alle $v \in V_N$.

Omdat $V_N \subset V_{N+1}$ is de rij $N \to \|u - F_N u\|_2$ dalend (niet noodzakelijk strikt).

Het is voldoende om te bewijzen dat $\inf_{N \geq 0} \|u - F_N u\|_2 = 0$ of met andere woorden voor iedere $\epsilon > 0$ is er $N \in \mathbb{N}$ zodat $\|u - F_N u\|_2 \leq \epsilon$.

Volgens de approximatiestelling van Weierstrass (Stelling A.4.2) is er voor gegeven $\epsilon > 0$ een $p \in G_{2\pi}$ te vinden zodat $\|u - p\|_\infty \leq \epsilon$. Er is dus een $N \in \mathbb{N}$ zodat $p \in V_N$. Merk op

(1.15) $\|u - p\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t) - p(t)|^2 \, dt \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \|u - p\|_\infty^2 = \|u - p\|_\infty^2 \leq \epsilon^2$.

Dus $\|u - p\|_2 \leq \epsilon$. Volgens de projectiestelling geldt:

$\|u - F_N u\|_2 \leq \|u - p\|_2$

en dus $\|u - F_N u\|_2 < \epsilon$. □

Opgave 25.

Zij $u : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ continu met $u(0) \neq u(2\pi)$. Voor $k \in \mathbb{Z}$ stel

$$\hat{u}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)e^{-ikt}dt \text{ en } F_N(u) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{u}(k)e_k\,, \quad N = 0,1,\ldots \text{ met}$$

$e_k(t) := e^{ikt}$, $t \in [0,2\pi]$. Laat zien

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} |u(t)-F_N(u)(t)|^2 dt = 0\,.$$

Hint:

Definieer op de complexe vectorruimte $V = C[0,2\pi]$ het inprodukt

(1.16) $$< u,v > := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\overline{v(t)}dt.$$

Stel $V_N := \{u \in V \mid u = \sum_{K=-N}^{N} \lambda_k e_k \text{ met } \lambda_k \in \mathbb{C}\}$.

Toon aan $N \to \|u-F_N u\|_2$ is dalend met $\|v\|_2 := < v,v >^{\frac{1}{2}}$.

Gegeven $\epsilon > 0$. Vind $\tilde{u} \in C_{2\pi}$ zodat $\|u-\tilde{u}\|_2 < \frac{\epsilon}{3}$.

Laat zien $F_N u - F_N \tilde{u} = F_N(u-\tilde{u})$ en $\|F_N(u-\tilde{u})\|_2 \leq \|u-\tilde{u}\|_2$.

Maak gebruik van de ongelijkheid

$$\|u-F_N u\|_2 \leq \|u-\tilde{u}\|_2 + \|\tilde{u}-F_N\tilde{u}\|_2 + \|F_N\tilde{u}-F_N u\|_2$$

en stelling 1.1. □

Opgave 26.

Zij $(V,\mathcal{K},<\cdot>)$ een inproduktruimte en zij $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ een orthonormaal stelsel.

Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1.17) i) voor alle $u \in V$ geldt $\sum_{k=0}^{\infty} |< u,e_k >|^2 = \|u\|^2$ (Gelijkheid van Bessel),

ii) voor alle $u, v \in V$ geldt

(1.18) $$\sum_{k=0}^{\infty} < u,e_k > \overline{< v,e_k >} = < u,v > \text{ ("Identiteit" van Parseval)},$$

iii) voor alle $u \in V$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \|u - \sum_{k=0}^{n} < u,e_k > e_k\| = 0\,,$$

iv) $\{v \in V \mid v = \sum_{k=0}^{n(v)} \lambda_k e_k,\ \lambda_k \in \mathcal{K}\}$ $(= \operatorname{span}_{k\in\mathbb{N}} \{e_k\})$ ligt dicht in V.

Opmerkingen.

Een orthonormaal stelsel $\{e_k\}_{k\in I}$ dat aan (1.17) voldoet heet volledig.

Een volledig orthonormaal stelsel $\{e_k\}_{k\in I}$ voldoet aan:

(1.19) $\quad < u,e_k > = 0$ voor alle $k \in I \Rightarrow u = 0$.

Een orthonormaal stelsel $\{e_k\}_{k\in I}$ waarvoor (1.19) geldt heet maximaal. (d.w.z. er is geen $e \in V$ te vinden waarvoor geldt $\|e\| = 1$ en $< e,e_k > = 0$ voor alle $k \in I$).

Opgave 27.

Zij $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en $\ell^2 := \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R};\ \sum_{i=0}^{\infty} |a(i)|^2 < \infty\}$ voorzien van het inprodukt

$< a,b > = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$.

Stel $e_k(i) = \delta_{ki}$ $\quad k, i \in \mathbb{N}$ en $e(i) = \frac{1}{i+1}$ zodat $e = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} e_i$.

Definieer $V := \{a \in \ell^2 \mid a = \lambda e + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, waarbij $\lambda, \lambda_i \in \mathbb{R}$ en n van a afhangen$\}$.

Laat zien:

a) V is een lineaire deelruimte van ℓ^2,

b) $(V,\mathbb{R},<\cdot>)$ is een inproduktruimte en $\{e_k\}_{k\geq 1}$ is een maximaal orthonormaal stelsel in V dat niet volledig is.

Opgave 28

Zij $u \in C^1_{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; f continu differentieerbaar en 2π periodiek$\}$.

Bewijs dat $\lim_{N\to\infty} \|F_N u - u\|_\infty = 0$; m.a.w. $F_N u \to u$ uniform op $\mathbb{R}$ als $N \to \infty$.

Aanwijzing: toon aan m.b.v. partiële integratie dat $ik\hat{u}(k) = \hat{u}'(k)$ en laat zien m.b.v. opgave (1) dat $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |\hat{u}(k)|^2 < \infty$.

Laat m.b.v. de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz: $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $i = -n,\ldots,n$

$$\sum_{i=-n}^{n} |a_i||b_i| \leq \left[\sum_{i=-n}^{n} |a_i|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=-n}^{n} |b_i|^2 \right]^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

zien dat $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}(k)| < \infty$.

Hint: schrijf $|\hat{u}(k)| = \frac{1}{k} \cdot k\, |\hat{u}(k)|$ $(k \neq 0)$.

Toon vervolgens aan dat de rij $\{F_N u\}_{N=1}^{\infty}$ een Cauchy–rij is in $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$.

Concludeer dat $F_N u \to v \in C_{2\pi}$ uniform op $\mathbb{R}$ als $N \to \infty$ en toon aan dat $\hat{v}(k) = \hat{u}(k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Concludeer vervolgens dat $F_N u \to u$ uniform op $\mathbb{R}$ als $N \to \infty$.