Notizen zur Vorlesung

Distributionen

G. Sweers

Sommersemester 2025

Inhaltsverzeichnis

Distributionen

Eine Einführung

δ

Kapitel 1

1.1 Die Funktion, die keine ist

Die sogenannte „**δ-function**“ wurde von Paul Dirac eingeführt, um einen Einheitsimpuls darzustellem und sollte die folgenden Eigenschaften haben:

1. $\delta(x) = 0$ für alle $x \neq 0$,
2. $\delta(x) = \infty$ für $x = 0$,
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ dx = 1$.

Wenn δ eine punktweise definierte Funktion ist und diese die ersten beiden Eigenschaften erfüllt, dann findet man, dass δ nicht Riemann-integrierbar sein kann. Denn jede Treppenfunktion oberhalb von δ hatte mindestens eine Treppenstufe mit Wert ∞. Außerhalb von 0 kann man Stufen mit Höhe 0 zulassen. So wäre jedes Rieman-Oberintegral ∞ und jedes Riemann-Unterintegral kleiner gleich 0. Eine Funktion ist Riemann-integrierbar, wenn man Ober- und Unterintegrale beliebig nahe den gleichen Wert konstruieren kann.

Für diejenigen, die sich mit dem Lebesgue-Integral auskennen: Lebesgue-Integrale werden auch durch Approximation mit Ober- und Unterintegralen definiert, jedoch mit allgemeineren “Stufen”. Hier kann man für ein Oberintegral mit drei Stufen auskommen: eine zulässige Oberfunktion ist

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, 0)\,, \\ \infty & \text{für } x \in \{0\}\,, \\ 0 & \text{für } x \in (0, \infty)\,. \end{cases}$$

Das Lebesgue-Integral in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^n$) einer einfachen nichtnegativen Funktion $f(x) := \sum_{i \in I} c_i \mathbf{1}_{A_i}$ mit I abzählbar und $c_i \geq 0$ wird definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\ d\lambda = \sum_{\substack{i \in I, \\ c_i > 0 \text{ und } \lambda(A_i) > 0}} c_i \lambda(A_i)$$

und hier ist

- A_i eine Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit
- $\mathbf{1}_{A_i}$ die **Indikatorfunktion** zu A_i, also

$$\mathbf{1}_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A_i, \\ 0 & \text{für } x \notin A_i, \end{cases}$$

  und
- $\lambda(A_i)$ das Lebesgue-Maß von A_i. Wenn das n-dimensionale Volumen von A_i definiert ist, dann gilt $\lambda(A_i) = \mathrm{Vol}\,(A_i)$.

Für δ liefert 0 eine einfache Unterfunktion und f eine einfache Oberfunktion. Es gilt jedoch, dass

$$\int_{\mathbb{R}} 0 \; d\lambda = 0 \text{ und } \int_{\mathbb{R}} f \; d\lambda = 0$$

und die dritte Eigenschaft der δ-Funktion passt nicht.

Wie kann man δ mathematisch sinnvoll definieren?

1.2 Funktionen durch Integrale festlegen

Definition 1.2.1 *Wir schreiben $C_0^\infty(\mathbb{R})$ für die Menge aller Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften besitzen:*

1. *φ ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$,*
2. *φ hat einen kompakten Träger auf $\mathbb{R}$.*

Bemerkung 1.2.2 *Man schreibt $C^k(\mathbb{R})$ für die Menge aller Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die k mal stetig differenzierbar sind, also eine solche Funktion ist derart, dass alle Ableitungen der Ordnung $n \leq k$ existieren und diese Ableitungen an sich sind stetig. $C_0^k(\mathbb{R})$ ist die Teilmenge der Funktionen in $C^k(\mathbb{R})$, die einen kompkten Träger haben.*

Beliebig oft differenzierbar nennt man auch unendlich oft differenzierbar. Das ist etwas irreführend, da die meisten von Ihnen schon 841 mal differenzieren können, aber ich unendlich oft persönlich nicht mehr schaffe. Der **Träger** (the support) einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathrm{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R}\, ; \varphi(x) \neq 0\}}, \tag{1.1}$$

also als Abschluss der Menge auf der φ ungleich 0 ist. Kompakte Mengen von $\mathbb{R}$ sind beschränkte, abgeschlossene Mengen.

Beispiel 1.1 Eine solche Funktion ist zum Beispiel

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{für } x \in (-1,1)\,, \\ 0 & \text{für } x \notin (-1,1)\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Die Tatsache, dass diese Funktion beliebig oft differenzierbar ist in ± 1 wird nur klar nach einiger Arbeit: für $|x| > 1$ folgt direkt $\varphi^{(n)}(x) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die andere Seite ist auch beliebig oft differenzierbar. Jedoch muss man zeigen, dass die folgenden Grenzwerte existieren und gleich sind:

$$\lim_{x \downarrow 1} \frac{\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(1)}{x-1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(1)}{x-1}.$$

Dazu braucht man die Ableitungen für $|x| < 1$:

$$\varphi'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right),$$
$$\varphi''(x) = \frac{6x^4-2}{(x^2-1)^4} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right),$$
usw.

Man kann mit vollständiger Induktion zeigen, dass

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{q_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \text{ für } |x| < 1$$

für irgendein Polynom $q_n(x)$ und dass

$$\lim_{x\uparrow 1} \varphi^{(n)}(x) = 0.$$

Wieso eigentlich?

Für $x = -1$ verwendet man, dass die Funktion symmetrisch ist.

Aufgabe 1.1 *Sei φ wie in (1.2). Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass*

$$\lim_{x\downarrow 1} \frac{\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(1)}{x-1} = 0 = \lim_{x\uparrow 1} \frac{\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(1)}{x-1}.$$

Beschreiben Sie sorgfältig die einzelnen Schritte, die man dazu braucht.

Lemma 1.2.3 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

bekannt ist, dann ist $f(x)$ festgelegt für jedes $x \in \mathbb{R}$.

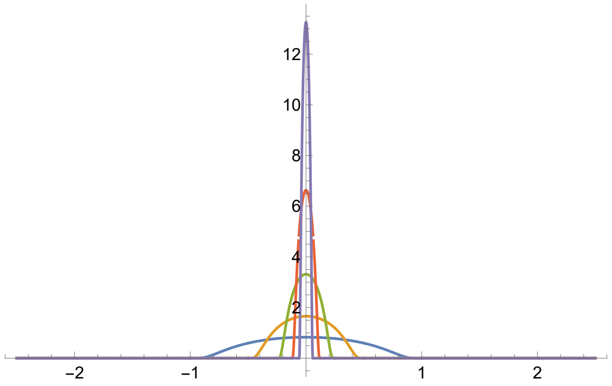


Abbildung 1.1: Several φ_ε all with integral 1

Beweis. Sei φ wie in (1.2) und definiere erst

$$\varphi_1(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy\right)^{-1} \varphi(x) \tag{1.3}$$

und anschließend für $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_1(x/\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{1.4}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Weiter gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x - x_0)dx = 1$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Mit der Definition vom Riemann-Integral zeigt man, dass für jede stetige Funktion f gilt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\varepsilon(x - x_0)\, dx = f(x_0). \tag{1.5}$$

Denn für jedes $\delta > 0$ gibt es $\varepsilon_\delta > 0$ derart, dass für $|x - x_0| < \varepsilon_\delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \delta$. So findet man für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$ dass

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\varepsilon(x - x_0)\ dx - f(x_0) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f(x_0)\right) \varphi_\varepsilon(x - x_0)\ dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x_0)|\, \varphi_\varepsilon(x - x_0)\ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \delta\ \varphi_\varepsilon(x - x_0)\ dx = \delta.
\end{aligned}$$

Weil man $\delta > 0$ beliebig wählen kann, folgt (1.5). ■

In (1.5) haben wir eine **Faltung** verwendet:

Definition 1.2.4 *Für $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ definiert man die Faltung*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy. \tag{1.6}$$

Bemerkung 1.2.5 *Es gilt $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ für $f, g \in C_0(\mathbb{R})$. Die Faltung oder Konvolution wird auch allgemeiner definiert als nur für $f, g \in C_0(\mathbb{R})$. Das Integral in (1.6) existiert schon, wenn eine der beiden Funktionen einen kompakten Träger hat oder genügend schnell abfällt in ∞.*

Lemma 1.2.6 *Seien $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ die Funktionen in (1.4) und definiere für beschränkte $f \in C(\mathbb{R})$:*

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x - y)f(y)\ dy.$$

Dann folgt für $f \in C(\mathbb{R})$, dass

1. *für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R})$,*
2. $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\varphi_\varepsilon * f)(x) = f(x)$.

Dieses Prozedere, um durch $\varphi_\varepsilon * f$ mit $\varepsilon > 0$ nahe bei f eine beliebig "glatte" (differenzierbare) Approximation zu konstruieren, nennt man die ***Friedrichs'sche Glättung****.*

Beweis. Man findet für $|h| < \varepsilon$, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{(\varphi_\varepsilon * f)(x + h) - (\varphi_\varepsilon * f)(x)}{h} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(x + h - y) - \varphi_\varepsilon(x - y)}{h} f(y)\ dy \\
&= \int_{y - 2\varepsilon}^{y + 2\varepsilon} \frac{\varphi_\varepsilon(x + h - y) - \varphi_\varepsilon(x - y)}{h} f(y)\ dy
\end{aligned}$$

und weil auf $[y - 2\varepsilon, y + 2\varepsilon]$ folgt, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi_\varepsilon(x + h - y) - \varphi_\varepsilon(x - y)}{h} = \varphi_\varepsilon'(x - y)$$

und dies sogar gleichmäßig, gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi_\varepsilon * f)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(\varphi_\varepsilon * f)(x + h) - (\varphi_\varepsilon * f)(x)}{h} \\
&= \int_{y - 2\varepsilon}^{y + 2\varepsilon} \varphi_\varepsilon'(x - y)f(y)\ dy = (\varphi_\varepsilon' * f)(x).
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus dem letzten Abschnitt des Beweises von Lemma 1.2.3. ■

Nicht nur stetige Funktionen werden festgelegt durch die Integrale mit $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktionen, sondern man kann auch so etwas wie die Dirac-δ-Funktion damit festlegen. Man sagt, die Wirkung von δ auf $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist wie folgt:

$$\delta(\varphi) := \varphi(0).$$

Das heißt jedoch, dass man nicht länger versucht punktweise einen Wert anzugeben.

1.3 Distributionen durch Integrale definieren

Für einen Funktionenraum wie $C_0^\infty(\mathbb{R})$ braucht man eine Struktur, die sagt, wie weit Elemente in dem Raum voneinander entfernt sind. Oft wird da eine Norm verwendet. Man kann für $C_0^\infty(\mathbb{R})$ die **Unendlich-Norm** nehmen, also

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)|\,; x \in \mathbb{R}\},$$

findet dann jedoch, dass $(C_0^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht abgeschlossen ist. Funktionen wie $f(x) = e^{-x^2}$ oder $g(x) = \max(0, 1 - |x|)$ kann man in $\|\cdot\|_\infty$-Norm mit Folgen in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ approximieren.

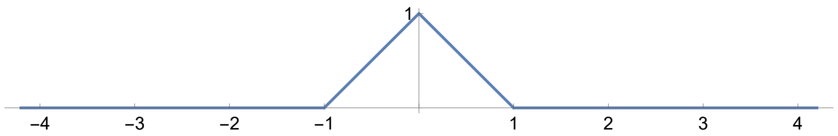


Abbildung 1.2: Die Funktion g

Aufgabe 1.2 *Zeigen Sie, dass man die Funktion g hier oben durch $(\varphi_\varepsilon * g)$ mit $\varepsilon \downarrow 0$ in $\|\cdot\|_\infty$-Norm approximieren kann.*

Aufgabe 1.3 *Finden Sie eine Folge in $C_0^\infty(\mathbb{R})$, die $f(x) = e^{-x^2}$ approximiert in $\|\cdot\|_\infty$-Norm.*

Eine einfache Norm, die $C_0^\infty(\mathbb{R})$ zu einem Banachraum macht, gibt es leider nicht. Man müsste in solch einer Norm mit allen Ableitungen rechnen. Sogar eine Metrik wie

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\left\|(\varphi-\psi)^{(n)}\right\|_\infty}{1+\left\|(\varphi-\psi)^{(n)}\right\|_\infty},$$

die wohl-definiert ist auf $C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$, verhindert nicht, dass eine Cauchy-Folge von Funktionen mit kompakten Trägern nicht unbedingt nach einer Funktion mit wieder einem kompakten Träger konvergiert. Die nächstbeste Lösung ist die folgende. Sie gibt uns keine Norm oder Metrik, sagt jedoch, wann eine Folge konvergiert:

Definition 1.3.1 (Konvergenz für Testfunktionen in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$) *Sei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Wir sagen, dass*

$$\varphi_n \to \varphi \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}) \text{ für } n \to \infty, \tag{1.7}$$

wenn Folgendes erfüllt ist:

1. *Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\left\|(\varphi_n - \varphi)^{(m)}\right\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.*
2. *Es gibt eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$.*

Man schreibt $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ für $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit dieser Konvergenz.

Einen Vektorraum mit einer Definition von offenen Mengen nennt man einen topologischen Raum. Man sagt $v_n \to v$ in dem Raum, wenn es für jede offene Menge $U \ni v$ eine Zahl m gibt derart, dass für alle $n > m$ gilt, dass $v_n \in U$ für alle $n > m$. $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ ist ein topologischer Raum.

Weil der Träger aller φ_n in K liegt, folgt für $x \notin K$, dass $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Also liegt auch der Träger vom Limes φ in K. Weil $\varphi_n^{(m)}$ stetig ist, ist $\varphi^{(m)}$ stetig auf kompakten Mengen, also auch auf K. Außerhalb von K ist φ gleich 0, also trivialerweise auch beliebig oft stetig differenzierbar.

Man definiert nun die Schwartz-Distributionen als Dualraum zu $\mathscr{D}(\mathbb{R})$:

Definition 1.3.2 (Schwartz-Distributionen $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$) *Die stetige, lineare Funktionale $F : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ nennt man Schwartz-Distribution. Man verwendet für diese Menge $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Bemerkung 1.3.3 *Also gilt für $F : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dass $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, wenn:*

1. *F ist linear: $F(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha F(\varphi_1) + \beta F(\varphi_2)$ für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

2. *F ist stetig: wenn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ für $n \to \infty$, dann gilt $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$.*

Wenn man schon gezeigt hat, dass F linear ist, dann reicht es für die Stetigkeit, wenn man dies nur für Nullfolgen zeigt: wenn $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ für $n \to \infty$, dann gilt $F(\varphi_n) \to 0$ in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$.

Beispiel 1.2 Das δ-Funktional ist eine Schwartz-Distribution, liegt also in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) &= (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(0) \\ &= \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha\delta(\varphi_1) + \beta\delta(\varphi_2), \end{aligned}$$

also ist δ linear. Wenn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, dann folgt u.A., dass $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0$ und dann auch

$$\begin{aligned} |\delta(\varphi_n) - \delta(\varphi)| &= |\varphi_n(0) - \varphi(0)| \\ &\le \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0, \end{aligned}$$

alles für $n \to \infty$. Das heißt, dass δ stetig ist.

Aufgabe 1.4 *Welche der folgenden Funktionale sind Schwartz-Distributionen in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$?*

1. $F_1(\varphi) := \varphi^{(5)}(3)$
(die fünfte Ableitung von φ an der Stelle 3);

2. $F_2(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi^{(n)}(0)$;

3. $F_3(\varphi) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$;

4. $F_4(\varphi) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

Man wird sich erinnern, dass Distributionen generalisierte Funktionen sind. Das wird jedoch bedeuten, dass man eine Funktion, die definiert ist auf $\mathbb{R}$, als stetiges, lineares Funktional von $C_0^\infty(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$ auffassen können muss. Das geht wie folgt:

Lemma 1.3.4 *Sei f eine lokal integrierbare Funktion und definiere für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ das Funktional*

$$F_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Dann gilt $F_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Bemerkung 1.3.5 *In Lemma 1.2.3 sah man, dass wenn f eine stetige Funktion ist, durch F_f diese Funktion f eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Weil f lokal integrierbar ist, dann ist f integrierbar auf kompakte Mengen wie zum Beispiel $K = \operatorname{supp}(\varphi)$. Weil φ stetig ist, ist auch $f\,\varphi$ integrierbar auf K. Das heißt wiederum, dass F_f ein Funktional von $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$ ist.

Die Linearität von F_f ist eine Eigenschaft des Integrals. Für die Stetigkeit bemerke man, dass wenn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, dann gibt es eine kompakte Menge $\tilde{K}$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \tilde{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und auch $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \tilde{K}$. Wir finden

$$\begin{aligned}
|F_f(\varphi_n) - F_f(\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\varphi(x) - \varphi_n(x)\right) dx \right| \\
&= \left| \int_{\tilde{K}} f(x)\left(\varphi(x) - \varphi_n(x)\right) dx \right| \\
&\leq \int_{\tilde{K}} |f(x)|\, |\varphi(x) - \varphi_n(x)|\, dx \\
&\leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty \int_{\tilde{K}} |f(x)|\, dx
\end{aligned}$$

mit $\int_{\tilde{K}} |f(x)|\, dx < \infty$ während $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Also gilt $F_f(\varphi_n) \to F_f(\varphi)$ in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$. ∎

1.4 Distributionen ableiten

Die Ableitung einer Funktion ist punktweise definiert:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Weil Distributionen nicht punktweise definiert sind, muss man einen Umweg gehen, um Distributionen zu differenzieren. Der Umweg heißt partielle Integration. Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, sagen wir mit Träger innerhalb $[-M, M]$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx &= \int_{-M}^{M} f'(x)\varphi(x) \\
&= [f(x)\varphi(x)]_{x=-M}^{M} - \int_{-M}^{M} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man schreiben als

$$F_{f'}(\varphi) = -F_f(\varphi').$$

Dadurch inspiriert setzt man:

Definition 1.4.1 (Ableitung einer Distribution) *Für $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definiert man $F' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ durch*

$$F'(\varphi) = -F(\varphi') \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

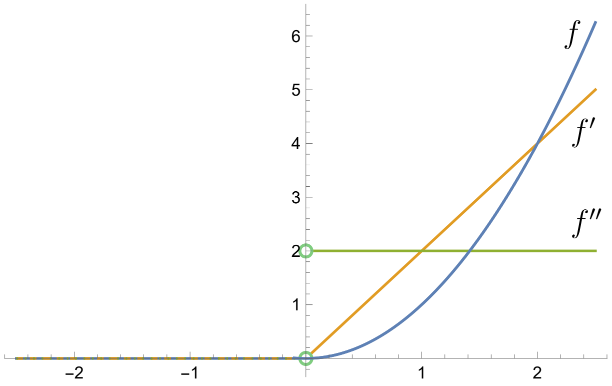
Bemerkung 1.4.2 *Dies ist eine korrekte Definition: Die Linearität von F' folgt aus der von F und dem Ableiten $\varphi \mapsto \varphi'$. Außerdem gilt, wenn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, dass auch $\varphi_n' \to \varphi'$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ und*

$$F'(\varphi_n) = -F(\varphi_n') \to -F(\varphi') = F'(\varphi).$$

Bemerkung 1.4.3 *Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar und $F^{(k)}(\varphi) = (-1)^k F(\varphi^{(k)})$ für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Beispiel 1.3 Betrachten wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x^2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$



Diese Funktion ist stetig differenzierbar und

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 2x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Wenn man nochmals differenziert folgt

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 2 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

jedoch auch, dass f in 0 nicht dreimal differenzierbar ist, denn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} \text{ existiert nicht.}$$

Außerhalb von 0 gilt $f^{(n)}(x) = 0$ für $n \geq 3$.

Wir schauen nun die Distribution F_f an. Dann gilt, wenn wir $\text{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$ nehmen, dass

$$\begin{aligned} F_f'(\varphi) &= -F_f(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^M x^2\varphi'(x)dx \\ &= \left[-x^2\varphi(x)\right]_0^M + \int_0^M 2x\ \varphi(x)dx \\ &= \int_0^\infty 2x\ \varphi(x)dx = F_{f'}(\varphi). \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist in distributionellem Sinne wohl definiert:

$$\begin{aligned} F_f''(\varphi) &= -F_f'(\varphi') = -F_{f'}(\varphi') = -\int_0^M 2x\ \varphi'(x)dx \\ &= -\left[2x\ \varphi(x)\right]_0^M + \int_0^M 2\ \varphi(x)dx \\ &= \int_0^\infty 2\ \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} 2H(x)\ \varphi(x)\ dx. \end{aligned}$$

Hier benutzen wir die **Heaviside-Funktion**:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Das heißt $F_f'' = F_{2H}$ und man bemerke, dass der Wert $\frac{1}{2}$ in 0 unwesentlich ist.

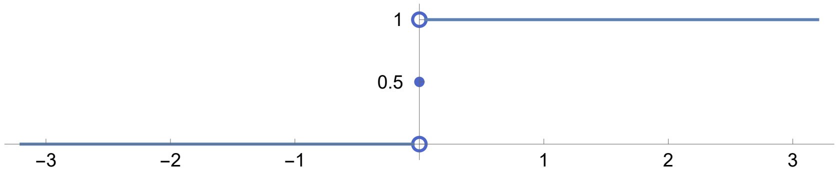


Abbildung 1.3: Die Heaviside-Funktion

Als nächste Ableitung findet man:

$$F_f'''(\varphi) = -F_f''(\varphi') = -\int_0^\infty 2\ \varphi'(x)dx$$
$$= [-2\varphi(x)]_0^M = 2\varphi(0) = 2\delta(\varphi),$$

mit δ die Dirac-δ-Distribution. Nochmals differenzieren bringt:

$$F_f''''(\varphi) = 2\delta'(\varphi) = -2\delta(\varphi') = -2\varphi'(0)$$

und weiter

$$F_f^{(5)}(\varphi) = 2\delta''(\varphi) = -2\delta'(\varphi') = 2\delta(\varphi'') = 2\varphi''(0).$$

Man findet für $k \geq 3$:

$$F_f^{(k)}(\varphi) = 2\,(-1)^{k-3}\,\varphi^{(k-3)}(0).$$

Die Funktion f kann man nur einmal auf $\mathbb{R}$ differenzieren. Die Distribution F_f kann man jedoch beliebig oft differenzieren. Man findet

$$F_f' = -F_{f'}$$

und wenn man in 0 ein Auge zudrückt sogar $F_f'' = F_{f''}$ aber mehr nicht. Für Ableitungen Ordnung 3 und höher hilft ein oder mehrere Augen zudrücken auch nicht mehr.

Aufgabe 1.5 *Nehme $g(x) = \ln|x|$ und betrachte F_g.*

1. *Zeigen Sie direkt und ohne Lemma 1.3.4, dass F_g eine Schwartz-Distribution ist.*
2. *Geben Sie eine Formel ohne Ableitung von $F_g'(\varphi)$ für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Distributionen Anwendungen

δ

Kapitel 2

2.1 Integral mit Singularität

Jeder hat schon mal das folgende Integral berechnet

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=a}^b = \frac{-1}{b} + \frac{1}{a},$$

und vergessen, dass dies nur stimmt, wenn $ab > 0$. Die Funktion $x \mapsto x^{-2}$ hat eine nicht-integrierbare Singularität in 0 und der Hauptsatz der Integralrechnung ist nur anwendbar, wenn a und b an der gleichen Seite von 0 liegen. Im Fall, dass $a < 0 < b$ gilt, sollte man zum Beispiel uneigentliche Riemann-Integrale in Betracht ziehen und man bemerkt, dass sowohl

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2}dx \text{ als auch } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^2}dx$$

beide nicht existieren.

Cauchy hat für einfache Singularitäten den Hauptwert vorgeschlagen. Dieser **Cauchy'sche Hauptwert**, man schreibt $\mathrm{CH}\frac{1}{x}$, kann als Distribution verstanden werden:

Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ setzt man

$$\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)dx\right). \tag{2.1}$$

Lemma 2.1.1 $\mathrm{CH}\dfrac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

In englisch-sprachigen Büchern steht meistens p.v.$\frac{1}{x}$ für "principal value", während die Franzosen über v.p.$\frac{1}{x}$ sprechen.

Beweis. Wir zeigen erst, dass der Ausdruck in (2.1) wohldefiniert ist. Dazu verwenden wir φ_1 aus (1.3) und setzen

$$\psi(x) := \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(0)}.$$

Für diese Funktion gilt $\operatorname{supp}(\psi) = [-1, 1]$ und $\psi(0) = 1$. Weil ψ symmetrisch ist, gilt

$$\left(\frac{1}{-x}\psi(-x)\right) = -\left(\frac{1}{x}\psi(x)\right) \text{ für } x > 0$$

und folgt für $\varepsilon > 0$, dass

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\psi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\psi(x)dx = 0.$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und es folgt für $\varepsilon > 0$, dass

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)dx =$$
$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\psi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)\psi(x)}{x}dx.$$

Weil $\psi(0) = 1$ und $\psi'(0) = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\varphi(x) - \varphi(0)\psi(x)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)\psi(0)}{x} - \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\varphi(0) \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} - \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\varphi(0) \right) \\
&= \varphi'(0) - \psi'(0)\varphi(0) = \varphi'(0).
\end{aligned}$$

Das heißt, dass diese Funktion

$$x \mapsto g(x) := \frac{1}{x}\left(\varphi(x) - \varphi(0)\psi(x)\right)$$

in 0 eine hebbare Singularität hat und durch $g(0) = \varphi'(0)$ in 0 stetig fortsetzbar ist. Es gilt

$$\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi - \varphi(0)\psi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

und weil g nicht nur stetig ist, aber sogar einen kompakten Träger hat, ist das letzte Integral wohl-definiert.

Die Linearität von $\mathrm{CH}\frac{1}{x}$ folgt direkt:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(c_a\varphi_a + c_b\varphi_b) \\
&= \left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)\left(c_a\varphi_a + c_b\varphi_b - \left(c_a\varphi_a(0) + c_b\varphi_b(0)\right)\psi\right)
\end{aligned}$$

(und hier verwenden wir die Linearität von Integralen)

$$\begin{aligned}
&= c_a\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)\left((\varphi_a - \varphi_a(0)\psi\right) + c_b\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)\left((\varphi_b - \varphi_b(0)\psi\right) \\
&= c_a\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi_a) + c_b\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi_b).
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit ist schon lästiger und braucht die Zerlegung von vorhin. Man sieht diese Stetigkeit wie folgt:

Ohne Verlust der Allgemeinheit, dürfen wir annehmen, dass $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ mit $\operatorname{supp}(\psi) = [-M, M]$ und es folgt, dass

$$\left|\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi_n)\right| = \left|\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi_n - \varphi_n(0)\psi)\right|$$

$$\begin{aligned}
\leq &\left|\int_{-1}^{1}\left(\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x} - \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\varphi_n(0)\right)dx\right| \\
&+ \left|\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{\varphi_n(x)}{x}dx\right| = (2.2)
\end{aligned}$$

Es gilt wegen der Symmetrie von ψ, dass

$$\int_{-1}^{1} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}dx = 0$$

und daher, dass

$$(2.2) = \left|\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{\varphi_n(x)}{x}dx\right|.$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}dx\right| \leq 2\left\|\varphi_n'\right\|_\infty .$$

Außerdem gilt

$$\left|\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{\varphi_n(x)}{x}dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\varphi_n(x)|\, dx \leq 2M\left\|\varphi_n\right\|_\infty .$$

Wir können nun (2.2) abschätzen durch

$$\left|\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi_n)\right| \leq 2\left\|\varphi_n'\right\|_\infty + 2M\left\|\varphi_n\right\|_\infty$$

und es folgt die Konvergenz $\left|\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)(\varphi_n)\right| \to 0$ für $n\to\infty$. ■

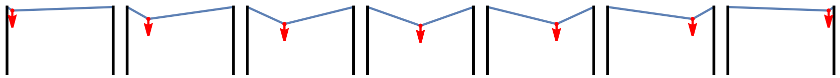
Aufgabe 2.1 *Zeigen Sie für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, dass*

$$\left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right)'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx\right).$$

Hinweis: betrachten Sie $\tilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$.

2.2 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wenn Sie Wäsche mit einer Klammer aufhängen, dann findet man, abhängig von der Stelle, die folgenden Bilder:



Setzen wir das Intervall auf $[0,1]$, die Richtung der Auslenkung u der Schnur positiv nach unten und die Höhe der Schnur ohne Auslenkung auf 0, so lässt sich die folgende Differentialgleichung herleiten, wenn das Einheitsgewicht an der Stelle $y \in (0,1)$ hängt:

$$\begin{cases} -u''(x) = \delta\,(x-y)\,, \\ \quad u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \tag{2.3}$$

Und ja, hier steht δ, als ob es eine Funktion ist. Man kann dieses Randwertproblem lösen, wenn man bedenkt, dass die zweite distributionelle Ableitung von $v\,(x) = |x|$ zweimal δ liefert. Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit Träger in $[-M,M]$ gilt

$$\begin{aligned} F_v''\,(\varphi) = F_v(\varphi'') &= \int_{-M}^{M} |x|\ \varphi''(x)\ dx \\ &= -\int_{-M}^{0} x\ \varphi''(x)\ dx + \int_{0}^{M} x\ \varphi''(x)\ dx \\ &= -\left[x\ \varphi'\right]_{-M}^{0} + \int_{-M}^{0} \varphi'(x)dx + \left[x\ \varphi'\right]_0^M - \int_0^M \varphi'(x)dx \\ &= 0+\varphi(0)+0+\varphi(0) = 2\delta(\varphi). \end{aligned}$$

Für die Lösung u von (2.3) bedeutet das:

$$u(x) = -\tfrac{1}{2}\,|x-y| + c_{1,y} + c_{2,y}x,$$

denn für die Lösung u von (2.3) bedeutet das:

$$-u''(x) = \delta(x-y)$$

in der etwas dubiösen Schreibweise. Mit den Randwerten folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = -\tfrac{1}{2}y + c_{1,y} \text{ und} \\ 0 &= u(1) = -\tfrac{1}{2}(1-y) + c_{1,y} + c_{2,y}, \end{aligned}$$

also $c_{1,y} = \frac{1}{2}y$, $c_{2,y} = \frac{1}{2} - y$ und

$$u(x) = \tfrac{1}{2}(x+y) - xy - \tfrac{1}{2}|x-y|\,.$$

Weil diese Funktion auch abhängt von y schreibt man explizit

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \tfrac{1}{2}(x+y) - xy - \tfrac{1}{2}|x-y| \\ &= \begin{cases} x(1-y) & \text{für } x \in [0,y]\,, \\ y(1-x) & \text{für } x \in [y,1]\,. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Diese Funktion g nennt man die Greensche Funktion für (2.4).

Weil (2.3) ein lineares Problem ist, kann man Lösungen mit mehreren Klammern an den Stellen y_i und Gewicht m_i auch mit Hilfe dieser Greenschen Funktion beschreiben. Die Gewichtsdichte, etwas dubiös geschrieben als

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} m_i\ \delta(x-y_i),$$

hat als Lösung

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k} m_i\ g(x,y_i).$$

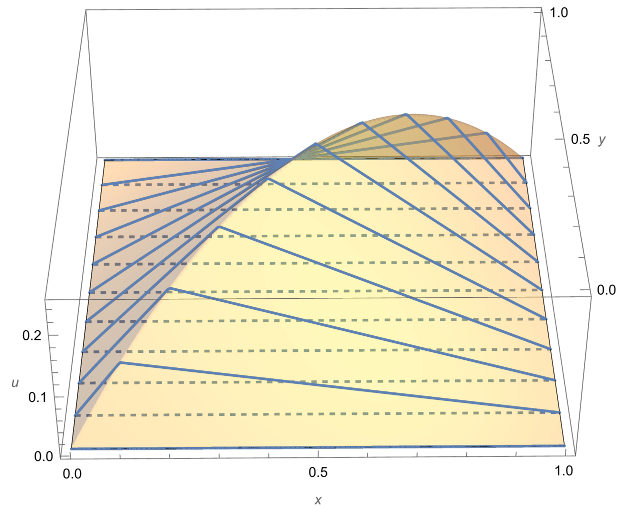


Abbildung 2.1: Die Funktion g aus (2.4)

Sogar eine kontinuierliche Gewichtsdichte $f(x)$, die man fast noch dubiöser schreiben kann als

$$f(x) = \int_{y=0}^{1} m(y)\ \delta(x-y)\ dy = m(x),$$

also

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases} \tag{2.5}$$

hat man als Lösung

$$u(x) = \int_{y=0}^{1} f(y)\ g(x,y)\ dy. \tag{2.6}$$

Eine Skizze von u für $f = 1_{[a,b]}$ finden Sie in Abbildung 2.2.

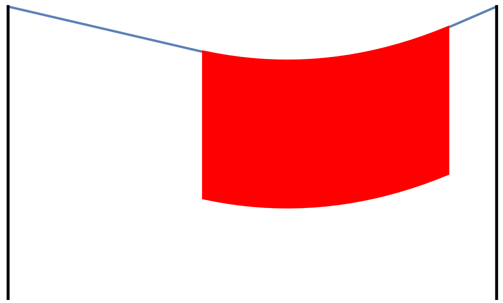


Abbildung 2.2: Eine Darstellung der Lösung u für $f = 1_{[a,b]}$. Sie dürfen raten, wo im Bild a und b stehen sollten.

Aufgabe 2.2 *Da sind wir gerade an einigen fürchterlichen Notationen vorbeigelaufen. Zeigen Sie durch direkte Berechnungen, dass für $f \in C[0,1]$ die Funktion u in (2.6) tatsächlich das Problem in (2.5) löst.*

Aufgabe 2.3 *Finden Sie eine Lösungsformel wie in (2.6) für*

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \\ u'(0) = 0 = u(1). \end{cases}$$

2.3 Die Wärmeleitungsgleichung

Diese Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung in den Raumvariablen x und die Zeit t, die beschreibt, wie eine Temperaturverteilung sich ändert in der Zeit. Im eindimensionalen Raum ist sie wie folgt:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,t) & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Hier ist die Temperaturverteilung am Anfang durch u_0 gegeben und man sucht die Lösung $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.

Die Lösung dieses Problems wird gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{y\in\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy. \tag{2.8}$$

Für $t > 0$ ist dies eine Formel ohne Singularitäten und man kann Ableiten und Integral vertauschen. Man berechnet direkt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(\frac{-1}{2t} + \frac{(x-y)^2}{4t^2}\right) \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(x-y)}{2t} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(\frac{-1}{2t} + \frac{(x-y)^2}{4t^2}\right) \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4t}\right) \end{aligned}$$

und sieht, dass die Differentialgleichung in (2.7) stimmt.

Was passiert, wenn man $t \downarrow 0$ gehen lässt in (2.8)? Durch die Substitution $y = x + s\sqrt{t}$ findet man

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\tfrac{1}{4}s^2\right) u_0(x + s\sqrt{t})\, ds.$$

Nehmen wir an, dass u_0 stetig und beschränkt ist, so folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\tfrac{1}{4}s^2\right)\ u_0(x+s\sqrt{t})\ ds \\
&= u_0(x)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\tfrac{1}{4}s^2\right)\ ds = u_0(x).
\end{aligned}$$

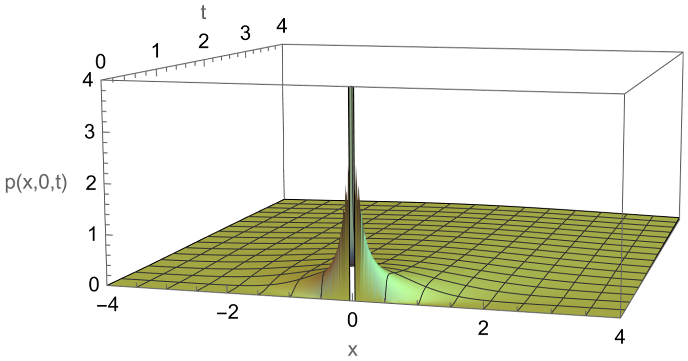


Abbildung 2.3: Der Wärmeleitungskern $p(x,y,t)$

Die Funktion

$$p\left(x,y,t\right) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-\left(x-y\right)^2}{4t}\right)$$

löst für $y \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} p\left(x,y,t\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p\left(x,y,t\right) & \text{für } \left(x,t\right) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ \lim\limits_{t\downarrow 0} p\left(x,y,t\right) = \delta(x-y) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Distributionen

Kapitel 3

Distributionen in $\mathbb{R}^n$

3.1 Schwartz in $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$ werden wir partiellen Ableitungen begegnen und da hilft es eine kurze Notation zu haben. Die ist wie folgt:

Notation 3.1.1 *Wir verwenden mit dem **Multiindex***

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

die folgenden kurzen Schreibweisen:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \\ \varphi^{(\alpha)}(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \alpha! &= \alpha_1!\ \alpha_2!\ \dots\ \alpha_n! \end{aligned}$$

und außerdem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Bei dem Polynom x^α ist $|\alpha|$ der Grad dieses Polynoms.
In $\varphi^{(\alpha)}(x)$ ist $|\alpha|$ die Ordnung der Ableitung.

Bemerkung 3.1.2 *Für eine Funktion $x \mapsto \varphi(x)$ schreiben wir kurz φ. Mit $\varphi(x)$ ist der Wert der Funktion φ an der Stelle x gemeint. Eine Ausnahme erlauben wir uns bei Polynomen $x \mapsto x^\alpha$, die manchmal kurz notiert werden durch x^α.*

Auch für Funktionen $\varphi \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ definiert man ähnlich wie in einer Dimension den **Träger** durch

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Beispiel 3.1 Für $u \in C(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$u(x_1, x_2) = \max\left(0, \left(1 - (x_1 - x_2)^2\right)\right) \sin(x_1) \tag{3.1}$$

gilt

$$\operatorname{supp}(u) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 - 1 \leq x_2 \leq x_1 + 1\right\}.$$

Wie in Definition 1.2.1 schreibt man $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ für den Vektorraum der **beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger**.

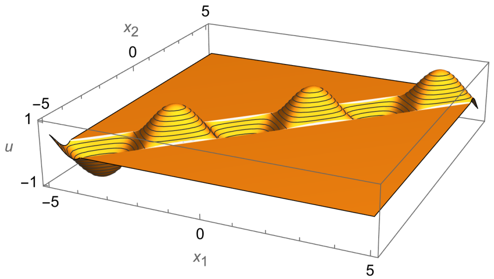


Abbildung 3.1: Die Funktion in (3.1) mit einem diagonalen Streifen als Träger

Definition 3.1.3 *Man schreibt $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ für den Vektorraum der Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der folgenden **Konvergenz**:*

1. $\left\|(\varphi_m - \varphi)^{(\alpha)}\right\|_\infty \to 0$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*,*
2. *es gibt eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass*
$$\operatorname{supp}(\varphi_m) \subset K \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Definition 3.1.4 (Schwartz-Distributionen $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$) *Die Elemente im Vektorraum der stetigen, linearen Abbildungen*
$$F : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}.$$
nennt man Schwartz-Distribution. Man schreibt für den Vektorraum $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Stetig heißt hier ähnlich wie vorher, dass
$$\varphi_m \to \varphi \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \text{ für } m \to \infty$$
$$\Downarrow$$
$$F(\varphi_m) \to F(\varphi) \text{ in } \mathbb{R} \text{ für } m \to \infty.$$

Distributionen sind generalisierte Funktionen. Um eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ als Distribution zu verstehen, setzt man:
$$F_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \varphi(x)\ dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$
Wie in Lemma 1.3.4 kann man auch in $\mathbb{R}^n$ zeigen, dass F_f für $f \in C(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist.

Definition 3.1.5 *Wenn für $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $F = F_f$, dann nennt man F eine **reguläre Distribution**.*

Man kann auch eine Konvergenz von Distributionen betrachten:

Definition 3.1.6 *Seien $F_m, F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Wir sagen*
$$F_m \to F \text{ in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ für } m \to \infty,$$
wenn für jedes $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt
$$|F_m(\varphi) - F(\varphi)| \to 0 \text{ in } \mathbb{R} \text{ für } m \to \infty.$$
*Man nennt dies **die schwache Konvergenz für Schwartz-Distributionen**. Schwach, weil man nicht F_m direkt betrachtet, sondern die Wirkung auf Testfunktionen φ verwendet.*

Aufgabe 3.1

1. *Zeigen Sie, dass für $f_m(x) := \frac{x}{x^2+m^{-2}}$ Folgendes gilt:*
$$F_{f_m} \to \left(\mathrm{CH}\frac{1}{x}\right) \text{ in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \text{ für } m \to \infty.$$
2. *Zeigen Sie, dass für $g_m(x) := \frac{m^{-1}}{x^2+m^{-2}}$ gilt:*
$$F_{g_m} \to \pi\delta \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \text{ für } m \to \infty.$$

3.2 Friedrichs'scher Glätter

Auch in höheren Dimensionen gibt es Funktionen von Friedrichs für die Glättung. Wie in einer Dimension setzt man erst

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ wenn } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ wenn } |x| \geq 1, \end{cases}$$

dann

$$\varphi_1(x) := \varphi(x) \Big/ \int_{|y|<1} \varphi(y)dy\,, \tag{3.2}$$

und schlussendlich für $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi_1\left(\varepsilon^{-1}x\right). \tag{3.3}$$

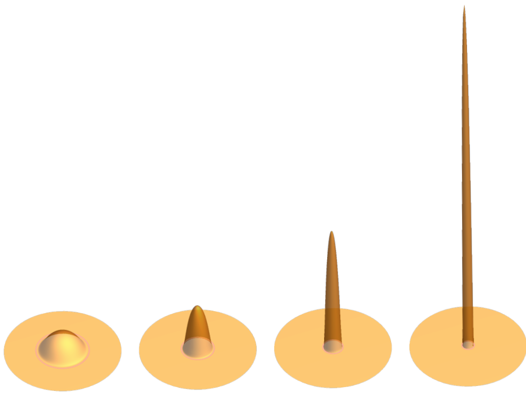


Abbildung 3.2: Funktionen φ_ε, wenn ε kleiner wird.

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Der Faktor ε^{-n} sorgt dafür, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$ gilt für $\varepsilon > 0$. Mit diesen Funktionen φ_ε bekommt man das folgende Ergebnis:

Lemma 3.2.1 *Sei φ_ε in (3.3) und sei $F_{\varphi_\varepsilon}, \delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon \in (0,1]$ durch*

$$\begin{aligned} F_{\varphi_\varepsilon}(\psi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\psi(x)dx \text{ und} \\ \delta(\psi) &:= \psi(0). \end{aligned}$$

Dann gilt $F_{\varphi_{1/m}} \to \delta$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ für $m \to \infty$.

Beweis. Wir verwenden zweimal $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$ und zeigen damit, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \left|F_{\varphi_{1/m}}(\psi) - \delta(\psi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\psi(x)dx - \psi(0)\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\left(\psi(x) - \psi(0)\right)dx\right| \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\left|\psi(x)-\psi(0)\right|dx &= \int_{|x|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\left|\psi(x)-\psi(0)\right|dx \\ &\leq \sup_{|x|<\varepsilon} \left|\psi(x)-\psi(0)\right|. \end{aligned}$$

Weil ψ stetig ist, folgt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{|x|<\varepsilon} |\psi(x) - \psi(0)| = 0$$

und damit das gefragte Ergebnis. ■

Die Faltung zweier Funktionen kann man auch für mehrere Dimensionen definieren.

Definition 3.2.2 *Für $u \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ definiert man die n-dimensionale **Faltung** durch*

$$(u * \varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\,\varphi(x-y)\,dy. \tag{3.4}$$

Bemerkung 3.2.3 *Substituiert man $\tilde{y} = x - y$, so findet man*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\,\varphi(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-\tilde{y})\,\varphi(\tilde{y})\,d\tilde{y}$$

und es folgt $u * \varphi = \varphi * u$. Das Faltungsprodukt ist auch wohl-definiert für Funktionen, wenn sie zusammen genügend schnell nach 0 konvergieren für $|x| \to \infty$.
Wenn beide Funktionen u und φ einen kompakten Träger haben, dann hat auch $u * \varphi$ einen kompakten Träger.

Lemma 3.2.4 *Wenn $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, dann folgt $\varphi * \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Setze $K_\varphi = \operatorname{supp}(\varphi)$ und $K_\psi = \operatorname{supp}(\psi)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy = \int_{K_\varphi \cap \left(\{x\} - K_\psi\right)} \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy.$$

Wenn $K_\varphi \subset B_r(0)$ und $K_\psi \subset B_s(0)$, dann folgt für $|x| > s+t$, dass

$$K_\varphi \cap (\{x\} - K_\psi) = \emptyset.$$

Der Träger von $\varphi * \psi$ liegt also in $B_{r+s}(0)$. Weil φ gleichmäßig stetig ist auf K_φ folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \psi(x-y)\,dy.$$

Das bedeutet, dass $\varphi * \psi$ beliebig oft differenzierbar ist. ■

Man kann die Faltung verwenden, um Funktionen zu approximieren. Sei φ_ε der Friedrichs'sche Glätter. So findet man für $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$, dass $u * \varphi_{1/m} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lim_{m \to \infty} \left(u * \varphi_{1/m}\right)(x) = u(x).$$

Wenn $\operatorname{supp}(u) \subset K$, dann folgt aus der Konstruktion, dass

$$\operatorname{supp}\left(u * \varphi_{1/m}\right) \subset K + \overline{B_{1/m}(0)}. \tag{3.5}$$

Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ definiert man

$$A + B := \{x + y; x \in A \text{ und } y \in B\}.$$

Die Tatsache, dass $u * \varphi_{1/m} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt, folgt aus

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(u * \varphi_{1/m}\right) = u * \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi_{1/m}. \tag{3.6}$$

Wir haben hier spezielle Funktionen φ_ε verwendet. Das ist nicht notwendig, wie man im folgenden Lemma sieht:

Lemma 3.2.5 *Sei $0 \le \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Definiere für $\varepsilon \in (0,1]$ die Funktionen*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Dann gilt für jede Funktion $u \in C(\mathbb{R}^n)$, dass $u * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(u * \varphi_\varepsilon) - u\|_\infty = 0. \tag{3.8}$$

Wenn $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, dann gilt sogar für $|\alpha| \le k$, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| (u * \varphi_\varepsilon)^{(\alpha)} - u^{(\alpha)} \right\|_\infty = 0. \tag{3.9}$$

Beweis. Aus $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ folgt $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$. Außerdem gilt

$$\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{\varepsilon x; x \in \operatorname{supp}(\varphi)\}.$$

Weil $\operatorname{supp}(u * \varphi_\varepsilon) \subset \operatorname{supp}(u) + \overline{B_\varepsilon(0)}$, gibt es eine Kompakte Menge K derart, dass für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}\|(u * \varphi_\varepsilon) - u\|_\infty &= \sup_{x\in K}\left|\int_{B_\varepsilon(0)} u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy - u(x)\right| \\ &= \sup_{x\in K}\left|\int_{B_\varepsilon(0)} (u(x-y)-u(x))\,\varphi_\varepsilon(y)dy\right| \\ &\le \sup_{x\in K}\int_{B_\varepsilon(0)} |u(x-y)-u(x)|\,\varphi_\varepsilon(y)dy\end{aligned}$$

Weil u auf K gleichmäßig stetig ist, gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon_\delta > 0$ derart, dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$ gilt, dass

$$\sup_{y\in B_\varepsilon(0)} |u(x-y)-u(x)| < \delta.$$

Für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ folgt

$$\|(u * \varphi_\varepsilon) - u\|_\infty \le \sup_{x\in K}\int_{B_\varepsilon(0)} \delta\ \varphi_\varepsilon(y)dy = \delta$$

und damit folgt (3.8). ■

Man braucht im letzten Lemma $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$, aber nicht mal, dass $\varphi \ge 0$. Im Fall, dass φ das Vorzeichen ändert, muss man sich überlegen, dass es zwei nicht-negative Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gibt derart, dass

$$\varphi = \psi_1 - \psi_2.$$

Setzen wir

$$c_1 = \int_{\mathbb{R}^n}\psi_1(x)dx \text{ und } c_2 = \int_{\mathbb{R}^n}\psi_2(x)dx,$$

dann folgt $1 = c_1 - c_2$. Skaliert man beide Funktionen wie in (3.7), dann zeigt man wie im Lemma, dass

$$\begin{aligned}\left\|(u * \psi_{1,\varepsilon}) - c_1 u\right\|_\infty &\to 0,\\ \left\|(u * \psi_{2,\varepsilon}) - c_2 u\right\|_\infty &\to 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\|(u * \varphi_\varepsilon) - u\|_\infty = \left\|\left(u * (\psi_{1,\varepsilon} - \psi_{2,\varepsilon})\right) - u\right\|_\infty \\ &= \left\|\left((u * \psi_{1,\varepsilon}) - (u * \psi_{2,\varepsilon})\right) - (c_1 - c_2)\,u\right\|_\infty \\ &\le \left\|(u * \psi_{1,\varepsilon}) - c_1 u\right\|_\infty + \left\|(u * \psi_{2,\varepsilon}) - c_2 u\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Die beiden letzten Terme gehen nach 0 wie im Lemma.

Aufgabe 3.2 *Seien $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}^2)$ definiert durch*

$$u_1(x) = \tfrac{1}{\pi}\exp\left(-|x|^2\right) \text{ und } u_2(x) = \tfrac{1}{4\pi}\exp\left(-|x|^2/4\right).$$

Zeigen Sie

$$(u_1 * u_2)(x) = \tfrac{1}{5\pi}\exp\left(-|x|^2/5\right).$$

3.3 Lineares Funktional und Distribution

Jede Distribution $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein lineares Funktional von $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathbb{R}$. Das folgende Ergebnis sagt, wann für so ein lineares Funktional die Stetigkeit erfüllt ist und es eine Distribution ist. Diese Stetigkeit ist wie folgt:

$$\varphi_m \to 0 \text{ in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \implies F(\varphi_m) \to 0.$$

Proposition 3.3.1 *Sei $F : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear. Folgendes ist äquivalent:*

- *$F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*
- *Für jedes M gibt es Konstanten $C_M \in \mathbb{R}^+$ und $k_M \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$\text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M,M]^n \text{ gilt: } |F(\varphi)| \leq C_M \sum_{|\alpha| \leq k_M} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_\infty .$$

Bemerkung 3.3.2 *Wenn $k_M = k \in \mathbb{N}$ eine feste Zahl ist, die für alle M funktioniert und dies auch die kleinstmögliche Zahl in $\mathbb{N}$ ist, die das macht, dann nennt man die* ***Distribution*** *F* ***von Ordnung*** *k.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ für $m \to \infty$. Dann gibt es $M \in \mathbb{R}^+$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_m) \subset [-M,M]^n$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Weil $\left\| \varphi_m^{(\alpha)} \right\|_\infty \to 0$ für $m \to \infty$ gilt und weil $|\alpha| \leq k$ bedeutet, dass es nur endlich viele Indizes betrifft, folgt auch, dass

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \varphi_m^{(\alpha)} \right\|_\infty \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Mit der obigen Abschätzung findet man $|F(\varphi_m)| \to 0$ für $m \to \infty$ und so, dass $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

($\Leftarrow$) Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und nehme an, es gibt eine Zahl $M \in \mathbb{R}^+$ für welche die Ungleichung falsch ist. Das heißt, für alle C_M und k_M, also auch $C_M = m$ und $k_M = m$ gibt es φ_m mit $\operatorname{supp}(\varphi_m) \subset [-M,M]^n$, und $F(\varphi_m) = 1$, während

$$m \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \varphi_m^{(\alpha)} \right\|_\infty < 1.$$

Wenn die Gleichung nicht erfüllt ist für φ_m, dann skaliert man zu $\varphi_m / |F(\varphi_m)|$. Dann gilt $\left\| \varphi_m^{(\alpha)} \right\|_\infty \leq \frac{1}{m}$ für $m \geq |\alpha|$ und das bedeutet $\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $F(\varphi_m) \to 0$ in $\mathbb{R}$ für $m \to \infty$. Das ist ein Widerspruch zu $F(\varphi_m) = 1$. ■

Partielle Ableitungen einer Distribution werden ähnlich wie vorher Ableitungen definiert:

Definition 3.3.3 *Für $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ wird $\frac{\partial}{\partial x_j} F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$\tfrac{\partial}{\partial x_j} F(\varphi) := -F(\tfrac{\partial}{\partial x_j} \varphi).$$

Beispiel 3.2 Sei $n \geq 3$ und betrachte $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = |x|^{2-n}.$$

Dann ist F_f mit

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

eine Distribution. Es gilt nämlich für φ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_M(0)$, der Kugel mit Radius R, dass

$$|F_f(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{B_M(0)} |x|^{2-n} dx$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \, \omega_n \int_0^M r^{2-n} r^{n-1} dr = \frac{1}{2} \|\varphi\|_\infty \, \omega_n M^2.$$

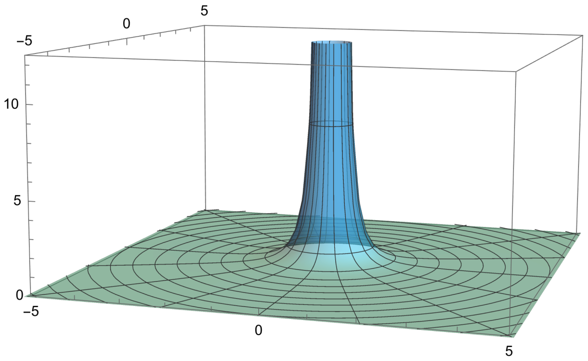


Abbildung 3.3: $x \mapsto |x|^{-3}$

Hier ist ω_n der (Hyper-)Flächeninhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre.

Wir wollen $-\Delta F_f$ berechnen für

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 .$$

Es gilt für φ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_M(0)$, dass

$$\Delta F_f(\varphi) = (-1)^2 F_f(\Delta\varphi) = \int_{B_M(0)} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x)\ dx.$$

In 0 hat das Integral eine Singularität und daher müssen wir, um partielle Integration mit Gauß anzuwenden, folgenden Grenzwert betrachten:

$$\int_{B_M(0)} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_M(0)\setminus B_\varepsilon(0)} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x)\ dx.$$

Dies ist möglich als uneigentliches Riemann-Integral oder auch als Lebesgue-Integral.

Partielle Integration für Integrale über ein Intervall liefert:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Man kann diese Regel leicht anwenden für rechteckige Gebiete in $\mathbb{R}^n$, wenn man den Satz von Fubini-Tonelli verwendet und das mehr-dimensionale Integral in wiederholten eindimensionalen Integralen schreibt und da diese Regel benutzt. Wenn man jedoch ein nicht-rechteckiges Gebiet hat, dann sind die Formel von Gauß und Green sehr hilfreich:

Satz von Gauß *Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\vec{v} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit Ω ein offenes, beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ gilt*

$$\int_\Omega u(x)\ \nabla\cdot\vec{v}(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\ \vec{v}(x)\cdot \tilde{\mathrm{n}}_x d\sigma_x - \int \nabla u(x)\cdot\vec{v}(x)\ dx$$

mit $\tilde{\mathrm{n}}_x$ dem auswärtigen Normalenvektor an der Stelle $x \in \partial\Omega$.

Satz von Green *Für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ mit Ω ein offenes, beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ gilt*

$$\int_\Omega u(x)\ \Delta v(x)\ dx =$$
$$\int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \tilde{\mathrm{n}}_x} - \frac{\partial u(x)}{\partial \tilde{\mathrm{n}}_x}\ v(x) \right) d\sigma_x + \int_\Omega \Delta u(x)\ v(x)\ dx$$

mit $\tilde{\mathrm{n}}_x$ wie bei dem Satz von Gauß.

Zur Erinnerung hier die Differentialoperatoren:

der Gradienten ∇: $\quad \nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$,
die Divergenz $\nabla\cdot$: $\quad \nabla\cdot\vec{v} = \partial_1 v_1 + \dots + \partial_n v_n$.

Mit diesem Ergebnis folgt

$$\begin{aligned}\int_{B_M(0)\backslash B_\varepsilon(0)} |x|^{2-n}\, \Delta\varphi(x)\ dx = \\ \int_{|x|=M} \left(r^{2-n}\frac{\partial}{\partial r}\varphi(x) - \frac{\partial}{\partial r} r^{2-n}\ \varphi(x) \right) d\sigma_x \\ - \int_{|x|=\varepsilon} \left(r^{2-n}\frac{\partial}{\partial r}\varphi(x) - \frac{\partial}{\partial r} r^{2-n}\ \varphi(x) \right) d\sigma_x \\ + \int_{B_M(0)\backslash B_\varepsilon(0)} \Delta\, |x|^{2-n}\ \varphi(x)\ dx. \quad (3.10)\end{aligned}$$

Weil $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_M(0)$ ist das erste Integral an der rechten Seite gleich 0. Für das zweite Integral in der rechten Seite von (3.10) gilt

$$\begin{aligned}- \int_{|x|=\varepsilon} \left(r^{2-n}\frac{\partial}{\partial r}\varphi(x) - \frac{\partial}{\partial r} r^{2-n}\ \varphi(x) \right) d\sigma_x = \\ - \int_{|x|=\varepsilon} \left(\varepsilon^{2-n}\nabla\varphi(x)\cdot\frac{x}{|x|} - (2-n)\, \varepsilon^{1-n}\ \varphi(x) \right) d\sigma_x\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\left| - \int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{2-n}\nabla\varphi(x)\cdot\frac{x}{|x|} d\sigma_x \right| \leq \\ \|\nabla\varphi\|_\infty\, \varepsilon^{2-n} \int_{|x|=\varepsilon} 1\ d\sigma_x = \|\nabla\varphi\|_\infty\, \varepsilon\ \omega_n\end{aligned}$$

und via

$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\varphi(x)-\varphi(0)) = \varphi(0) + \mathcal{O}(\,|x|\,)\, \|\nabla\varphi\|_\infty$$

folgt

$$\begin{aligned}\int_{|x|=\varepsilon} (2-n)\, \varepsilon^{1-n}\ \varphi(x) d\sigma_x \\ = \int_{|x|=\varepsilon} (2-n)\, \varepsilon^{1-n}\ \varphi(0) d\sigma_x + \|\nabla\varphi\|_\infty\, \mathcal{O}(\varepsilon) \\ = (2-n)\, \omega_n \varphi(0) + \|\nabla\varphi\|_\infty\, \mathcal{O}(\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Für das letzte Integral in (3.10) bemerkt man, dass

$$\begin{aligned}\Delta\, |x|^{2-n} &= \sum_{i=1}^n \tfrac{\partial}{\partial x_i} \left((2-n)\, \frac{x_i}{|x|^n} \right) \\ &= (2-n) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{|x|^n} - \frac{n\ x_i^2}{|x|^{n+2}} \right) \\ &= (2-n) \left(\frac{n}{|x|^n} - \frac{n\, |x|^2}{|x|^{n+2}} \right) = 0.\end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies

$$\begin{aligned}\Delta F_f(\varphi) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{B_M(0)\backslash B_\varepsilon(0)} |x|^{2-n}\, \Delta\varphi(x)\ dx \\ &= (2-n)\, \omega_n \varphi(0) + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|\nabla\varphi\|_\infty\, \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= (2-n)\, \omega_n \delta(\varphi),\end{aligned}$$

also als Distribution:

$$-\Delta F = (n-2)\, \omega_n \delta$$

Weil für die Funktion

$$x \mapsto \mathrm{u}_n(x) := \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)\,\omega_n} \tag{3.11}$$

gilt, dass

$$-\Delta \mathrm{u}_n = \delta$$

oder eigentlich $-\Delta F_{\mathrm{u}_n} = \delta$, nennt man u_n eine **Fundamentallösung für** $-\Delta$. Für die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = g(x)$$

mit $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ findet man eine Lösung durch

$$u(x) := (\mathrm{u}_n * g)(x).$$

Diese letzte Formel gilt sogar für allgemeinere Funktionen g.

Aufgabe 3.3 *Zeigen Sie, dass in* $\mathbb{R}$ *eine Fundamentallösung für* $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4$ *gegeben ist durch* $\mathrm{u}(x) := \frac{1}{12}|x|^3$.

Aufgabe 3.4 *In* $\mathbb{R}^2$ *ist eine Fundamentallösung für* $-\Delta$ *gegeben durch* $\mathrm{u}_2(x) := \frac{\log|x|}{2\pi}$. *Zeigen Sie dies.*

Aufgabe 3.5 *Zeigen Sie, dass in* $\mathbb{R}^2$ *eine Fundamentallösung für* Δ^2 *gegeben ist durch* $\mathrm{u}(x) := \frac{-1}{8\pi}|x|^2 \log|x|$.

Aufgabe 3.6 *Sei* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Zeigen Sie:* $\Delta |x|^\alpha = \alpha (n-2+\alpha) |x|^{\alpha-2}$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. *Benutzen Sie dies und Beispiel 3.2, um eine Fundamentallösung für* Δ^2 *in* $\mathbb{R}^n$ *mit* $n \geq 5$ *zu finden.*

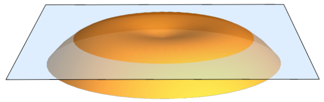


Abbildung 3.4: u aus Aufgabe 3.5 mit 0-Niveau

3.4 Der Träger einer Distribution

Wir werden auch die **Träger einer Distribution** brauchen. Weil Distributionen definiert sind durch ihre Wirkung auf Funktionen und nicht punktweise, ist dies etwas umständlich.

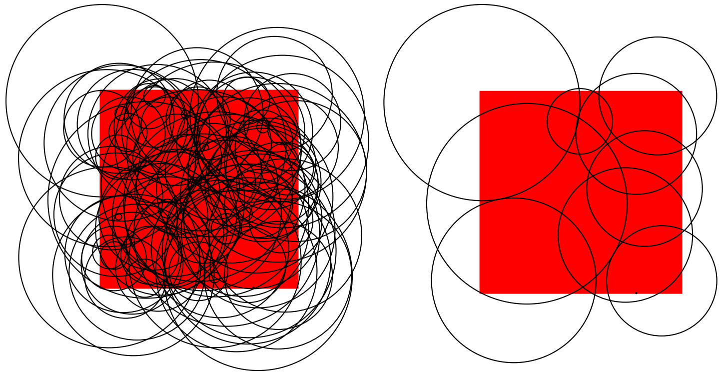


Abbildung 3.5: Schon endlich viele überdecken

Man braucht einige Ergebnisse aus der Topologie. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn man aus jeder offenen Überdeckung endlich viele offene Mengen wählen kann, die K schon überdecken.

Definition 3.4.1 (Zerlegung der Eins) *Sei* $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und sei* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\ell}$ *eine offene Überdeckung von* K. *Dann* *nennt man $\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Zerlegung der Eins auf K bezüglich $\mathcal{U}$, wenn Folgendes erfüllt ist:*

1. $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset U_i \ \forall i \in \{1, \dots, \ell\}$;
2. $0 \le \psi_i(x) \le 1 \ \forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ *und* $\sum_{i=1}^{\ell} \psi_i(x) \le 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$;
3. $\sum_{i=1}^{\ell} \psi_i(x) = 1 \ \forall x \in K$.

Theorem 3.4.2 *Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und endliche Überdeckung $\mathcal{U}$ von K, gibt es eine $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Zerlegung der Eins auf K bezüglich $\mathcal{U}$.*

Beweis. Wir brauchen eine Hilfsfunktion und definieren $\psi_{\text{one}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi_{\text{one}}(s) := \int_{-\infty}^{s} \varphi_1(t)dt. \tag{3.12}$$

Für diese Funktion gilt $\psi_{\text{one}} \in C^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\psi_{\text{one}}(s) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < -1, \\ \text{auf } [-1, 1] \text{ wachsend von } 0 \text{ nach } 1, \\ 1 \text{ für } x > 1. \end{cases}$$

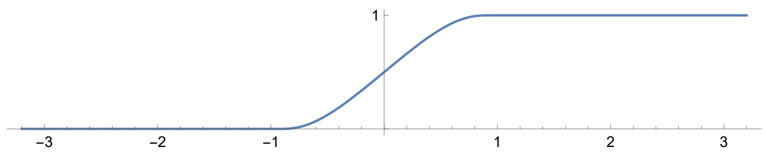


Abbildung 3.6: ψ_{one} geht glatt von 0 nach 1

Indem man diese Funktion verschiebt, skaliert und herumdreht, findet man durch

$$\Psi_r(x) := \psi_{\text{one}}(3 - 2r^{-1}|x|) \tag{3.13}$$

eine Funktion $\Psi_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $r > 0$ mit

$$\begin{cases} \Psi_r(x) = 1 & \text{für } |x| \le r, \\ \Psi_r(x) \in (0,1) & \text{für } r < |x| < 2r, \\ \Psi_r(x) = 0 & \text{für } |x| \ge 2r. \end{cases}$$

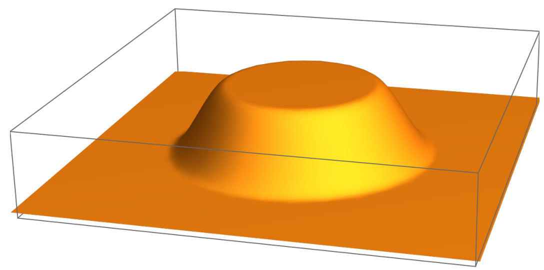


Abbildung 3.7: Ψ_r

Bemerke, dass $x \mapsto \Psi_r(x - y)$ eine $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktion ist mit Werten in $[0, 1]$. Die Funktion ist gleich 1 auf $B_r(y)$ und Träger $\overline{B_{2r}(y)}$.

Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\ell}$ die Überdeckung. Dann gibt es für jedes $x \in K$ einen U_i mit $x \in U_i$. Für jedes x geben wir ein i an für die gilt $x \in U_i$ und halten diesen Index fest. Dann kann man eine Zahl $r_x > 0$ finden, mit $B_{2r_x}(x) \subset U_i$.

Die kompakte Menge K wird auch überdeckt durch $\{B_{r_x}(x)\}_{x \in K}$ und auch hieraus kann man eine endliche Teilüberdeckung wählen. Wir schreiben dafür

$$\left\{B_{r_k}(x_{(k)})\right\}_{k=1}^{m}. \tag{3.14}$$

Wir nehmen an, dass es $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell = m$ gibt derart, dass für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt

$$B_{2r_k}(x_{(k)}) \subset U_i \text{ für } k_{i-1} < k \leq k_i.$$

Wir setzen nun

$$\tilde{\psi}_k(x) = 1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \Psi_{r_j}(x - x_{(j)})\right).$$

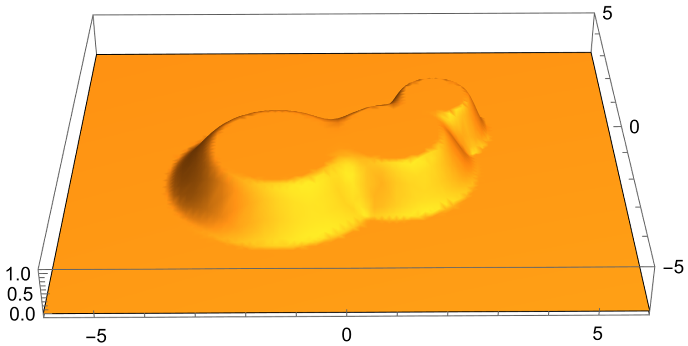


Abbildung 3.8: Eine Skizze von $\tilde{\psi}_3(x)$ mit drei $B_{r_i}(x_i)$

Für $\tilde{\psi}_k$ gilt Folgendes:

1. $\tilde{\psi}_k(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
   Dies folgt, weil $\Psi_\varepsilon(x - x_{(j)}) \in [0, 1]$.

2. $\tilde{\psi}_k(x) = 1$ wenn $x \in \bigcup_{j=1}^{k} \overline{B_{r_j}(x_{(j)})}$.
   Denn in dem Fall ist ein $j \in \{1, \dots, k\}$ derartig, dass $\Psi_{r_j}(x - x_{(j)}) = 1$ und so gilt auch $\tilde{\psi}_k(x) = 1$.

3. $\tilde{\psi}_k(x) = 0$ wenn $x \notin \bigcup_{j=1}^{k} B_{2r_j}(x_{(j)})$.
   Denn dann gilt $\Psi_{r_j}(x - x_{(j)}) = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und folgt auch $\tilde{\psi}_k(x) = 0$.

Außerdem findet man, weil

$$1 - \tilde{\psi}_k(x) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \Psi_{r_j}(x - x_{(j)})\right),$$

dass $k \mapsto \tilde{\psi}_k(x)$ wachsend ist und, weil K durch die Kugeln in (3.14) überdeckt wird, gilt für die letzte:

$$\tilde{\psi}_m(x) = 1 \text{ für } x \in K.$$

Die gesuchten Funktionen für die Zerlegung der Eins sind $\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ definiert durch

$$\psi_1(x) = \tilde{\psi}_{k_1}(x) \text{ und}$$
$$\psi_i(x) = \tilde{\psi}_{k_i}(x) - \tilde{\psi}_{k_{i-1}}(x) \text{ für } i = 2, \dots, \ell.$$

Die Konstruktion ist derart, dass $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset U_j$. ■

Definition 3.4.3 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ die größte offene Menge derart, dass $F(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset O$. *Dann setzt man für den* ***Träger*** *von F:*

$$\operatorname{supp}(F) := \mathbb{R}^n \setminus O.$$

Dies ist schon eine freche Definition, denn gibt es überhaupt so eine größte offene Menge? Die offene Menge O soll die größte sein in

$$\mathcal{T} := \left\{ U \subset \mathbb{R}^n; \begin{array}{c} U \text{ offen mit } F(\varphi) = 0 \text{ für alle} \\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset U \end{array} \right\}.$$

Diese Menge $\mathcal{T}$ offener Mengen hat eine partielle Ordnung durch $U_1 \subset U_2$ und mit dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{T}$ ein größtes Element. Das größte Element muss jedoch nicht eindeutig sein, es sei denn, man kann zeigen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ impliziert $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{T}$. Das folgt genau aus dem letzten Theorem. Wenn U_1 und U_2 beide eine größte offene Menge wären und weder $U_1 \subset U_2$ noch $U_2 \subset U_1$ gilt, dann ist $U_1 \cup U_2$ größer als beide einzeln. Nehmen wir an, diese Menge gehört dann nicht mehr zu $\mathcal{T}$. Das heißt, es gibt eine Testfunktion φ mit Träger $K \subset U_1 \cup U_2$ und $F(\varphi) \neq 0$. Sei nun $\{\psi_1, \psi_2\}$ eine Zerlegung der Eins auf K bezüglich der Überdeckung $\{U_1, U_2\}$. Es gilt

$$0 \neq F(\varphi) = F(\psi_1 \varphi) + F(\psi_2 \varphi)$$

und weil $\operatorname{supp}(\psi_i \varphi) \subset K \cap U_i$ folgt $F(\psi_i \varphi) = 0$ für $i = 1, 2$, ein Widerspruch. Das heißt, $U_1 \cup U_2$ gehört doch zu $\mathcal{T}$ und es gibt nur eine größte offene Menge.

Übrigens kann O auch leer sein, wie zum Beispiel für F_f mit $f(x) = 1$.

Aufgabe 3.7 *Wenn $f \in C(\mathbb{R}^n)$, gilt*

$$\operatorname{supp}(F_f) = \operatorname{supp}(f).$$

Zeigen Sie dies.

Aufgabe 3.8

1. *Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und sei O die größte offene Menge in* $\operatorname{supp}(f)$. *Zeigen Sie, dass* $\operatorname{supp}(f) = \overline{O}$.
2. *Gilt das auch beim Träger einer Distribution?*

3.5 Mit kompaktem Träger

Lemma 3.5.1 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Folgendes ist äquivalent:*

- *Es gibt $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$|F(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L^\infty(K)}. \tag{3.15}$$

- *F hat einen kompakten Träger* $\operatorname{supp}(F) \subset K$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Nehmen wir an die Abschätzung gilt, jedoch auch, dass $\operatorname{supp}(F) \not\subset K$. Dann sollte ein Widerspruch folgen.

Der Träger $\operatorname{supp}(F)$ ist definiert als Komplement der größten offenen Menge O derart, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset O$ gilt $F(\varphi) = 0$. Wenn $\operatorname{supp}(F) \not\subset K$, dann gibt es $x_0 \in \operatorname{supp}(F) \setminus K$. Weil K abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R}^n \setminus K$ offen und existiert $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. Wenn $F(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \overline{B_\varepsilon(x_0)}$, dann gehört x_0 nicht zum Träger von F. Also gibt es ein φ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ und $F(\varphi) \neq 0$. Weil $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$, findet man $\left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L^\infty(K)} = 0$ und dies widerspricht der Abschätzung in (3.15).

($\Leftarrow$) Betrachte für $\varepsilon \in (0, 1]$ die Menge

$$K + \overline{B_\varepsilon(0)} := \left\{ x + y; x \in K \text{ und } y \in \overline{B_\varepsilon(0)} \right\}.$$

Wie K ist dies auch eine kompakte Menge. Weil

$$K \subset K + B_\varepsilon(0) \subset K + \overline{B_\varepsilon(0)}$$

und die Menge in der Mitte offen ist, gibt es eine Funktion $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \psi_\varepsilon(x) \le 1$ und

$$\psi_\varepsilon(x) = 1 \text{ auf } K + \overline{B_{\varepsilon/2}(0)} \text{ und } \operatorname{supp}(\psi_\varepsilon) \subset K + B_\varepsilon(0).$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $\operatorname{supp}((1-\psi_\varepsilon)\varphi) \cap K = \emptyset$ und folgt

$$F((1-\psi_\varepsilon)\varphi) = 0.$$

Daher gilt

$$F(\varphi) = F(\psi_\varepsilon\varphi).$$

Dies bedeutet, dass wir uns, um die Abschätzung zu beweisen, <u>einschränken</u> <u>dürfen</u> auf Funktionen φ mit Träger in $K + \overline{B_\varepsilon(0)} \subset K + \overline{B_1(0)}$. Für Testfunktionen mit Träger in $K + \overline{B_1(0)}$ folgt mit Proposition 3.3.1, dass es $C > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|F(\varphi)| \le C_1 \sum_{|\alpha| \le k_1} \left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_\infty .$$

Weil für φ mit Träger in $K + \overline{B_\varepsilon(0)}$ gilt, dass $\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_\infty = \left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty(K+B_\varepsilon(0))}$, folgt

$$|F(\varphi)| \le C_1 \sum_{|\alpha| \le k_1} \left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty(K+B_\varepsilon(0))} . \tag{3.16}$$

Weil K kompakt ist, $\varphi \in C^{|\alpha|}(K)$ gilt und es nur endlich viele $|\alpha| \le k$ gibt, folgt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty(K+B_\varepsilon(0))} = \left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty(K)}$$

und die gewünschte Abschätzung. ■

Proposition 3.5.2 *Wenn der Träger von $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ nur den Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ enthält, dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass*

$$F(\varphi) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \varphi^{(\alpha)}(0). \tag{3.17}$$

Bevor wir dieses Ergebnis beweisen können, werden wir an den Satz von Taylor erinnern, dem Sie in der Analysis-Vorlesung begegnet sind:

Satz von Taylor in 0: *Sei $n, m \in \mathbb{N}$ und sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(m+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\varphi^{(\alpha)}(0) + \\ (m+1) \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_{t=0}^1 (1-t)^m \varphi^{(\alpha)}(tx)\, dt$$

mit der Multiindex-Notation 3.1.1.

Beweis von Proposition 3.5.2. Wegen Lemma 3.5.1 wissen wir, dass es $C \in \mathbb{R}^+$ und $m \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass

$$|F(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha| \le m} \left|\varphi^{(\alpha)}(0)\right| . \tag{3.18}$$

Verwenden wir Taylor für eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt

$$\varphi(x) = T(x) + R_\varphi(x) \text{ mit } T(x) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\varphi^{(\alpha)}(0).$$

Hier ist T das Taylorpolynom und R_φ der Restterm bei Taylor. Weil T jedoch keinen beschränkten Träger hat, verwenden wir

Ψ_r aus (3.13) und betrachten

$$\varphi(x)\Psi_1(x) = T(x)\Psi_1(x) + R_\varphi(x)\Psi_1(x)$$

und bemerken, dass $\varphi\Psi_1, \varphi\left(1-\Psi_1\right), T\Psi_1, R_\varphi\Psi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Weil F als Träger nur $\{0\}$ hat und

$$\operatorname{supp}\left(\varphi\left(1-\Psi_1\right)\right) \subset \operatorname{supp}(\varphi) \setminus B_1(0),$$

folgt

$$F(\varphi\Psi_1) = F(\varphi) - F\left(\varphi\left(1-\Psi_1\right)\right) = F\left(\varphi\right).$$

Der Restterm R_φ ist derart, dass die Ableitungen von Ordnung kleiner gleich $m+1$ in 0 alle 0 sind. Weil $\Psi_1(x) = 1$ auf $B_1(0)$, gilt das auch für $R_\varphi\Psi_1$. Dann folgt aus (3.18), dass

$$\left|F\left(R_\varphi\Psi_1\right)\right| = 0.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} F\left(\varphi\right) = F(\varphi\Psi_1) = F\left(T\Psi_1\right) &= F\left(\sum\nolimits_{|\alpha|\le m} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\varphi^{(\alpha)}(0)\Psi_1\right) \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\varphi^{(\alpha)}(0)\ F\left(x^\alpha\Psi_1\right) \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{F\left(x^\alpha\Psi_1\right)}{\alpha!}\ \varphi^{(\alpha)}(0). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $c_\alpha := F\left(x^\alpha\Psi_1\right)/\alpha!$ hängen nicht von φ ab und so folgt (3.17). ■

Distributionen

Kapitel 4

Andere Distributionen

4.1 Temperierte Distributionen in $\mathbb{R}^n$

Den Testfunktionen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und den Schwartz-Distributionen $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ begegnet man meistens zuerst, wenn man mit Distributionen zu tun hat. Es gibt jedoch auch andere und auch da fängt man mit den Testfunktionen an. Die nächste Sorte sind die temperierten Distributionen, die definiert sind auf den **schnell-fallenden Testfunktionen** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 4.1.1 (Schnell-fallende Testfunktionen)
Sei $C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für die gilt

$$\left\| x^\beta \varphi^{(\alpha)} \right\|_\infty < \infty \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

*Man schreibt $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n)$ mit der **Konvergenz**:*

$$\varphi_m \to \varphi \text{ für } m \to \infty \text{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

definiert durch: für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$\left\| x^\beta \left(\varphi_m - \varphi\right)^{(\alpha)} \right\|_\infty \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Aufgabe 4.1 *Zeigen Sie für die Funktion $\varphi(x) = \exp\left(-x^2\right)$, dass $\varphi \in C^\infty_{s.f.}(\mathbb{R}^n)$.*

Man sollte bemerken, dass

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneqq C^\infty_{\text{s.f.}}(\mathbb{R}^n)$$

und dass wenn $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt auch $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Das heißt, dass man für die Stetigkeit in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit mehr Funktionfolgen testet. Dann sind mehr Bedingungen zu erfüllen und es folgt

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Diese Beobachtung führt zu folgender kleineren Klasse von Distributionen:

Definition 4.1.2 (Temperierte Distributionen) *$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller stetigen, linearen Funktionalen*

$$F : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}.$$

Stetig heißt hier erneut, dass wenn $\varphi_m \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $m \to \infty$, dann gilt $F(\varphi_m) \to F(\varphi)$ in $\mathbb{R}$ für $m \to \infty$.

Beispiel 4.1 Definiere $F : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(\varphi) := \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} e^{2k^2}\varphi(k).$$

Für Funktionen $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ gibt es $M \in \mathbb{R}^+$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_m) \in [-M, M]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|F(\varphi_m)| &\leq \sum\nolimits_{0\leq k<M} e^{2k^2}\,|\varphi_m(k)| \\ &\leq M\ e^{2M^2}\,\|\varphi_m\|_\infty \to 0 \text{ für } m \to \infty.\end{aligned}$$

Das bedeutet $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Für $\varphi(x) = \exp(-x^2)$, und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, ist $F(\varphi)$ jedoch nicht als reelle Zahl definiert:

$$F(\varphi) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} e^{2k^2}e^{-k^2} = \infty.$$

Wir finden $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Man kann jedoch Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ benutzen, um Funktionen in $C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$-Art zu approximieren. Dazu verwenden wir die eindimensionale Funktion $\psi_{\text{one}} \in C^\infty(\mathbb{R})$, die in (3.12) konstruiert wurde.

Lemma 4.1.3 *Sei $\varphi \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R})$ und definiere für $m \in \mathbb{N}$ die Funktion*

$$\varphi_m(x) = \varphi(x)\psi_{one}(x+m)\psi_{one}(-x+m). \tag{4.1}$$

Dann gilt $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_m) \in [-m-1, m+1]$ und außerdem, dass

$$\varphi_m \to \varphi \textit{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}) \textit{ für } m \to \infty.$$

Bemerkung 4.1.4 *Für $\varphi \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert man*

$$\varphi_m(x_1,\ldots,x_n) = \varphi(x) \prod_{1\leq k\leq n} \psi_{one}(x_k+m)\psi_{one}(-x_k+m)$$

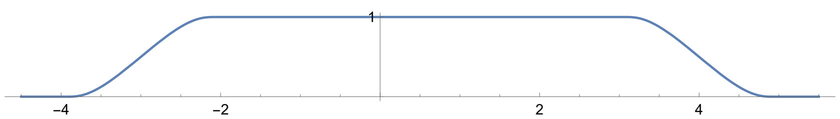
und bekommt ein ähnliches Ergebnis:

$$\varphi_m \to \varphi \textit{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \textit{ für } m \to \infty.$$

Beweis. Die folgende Skizze gehört zu

$$x \mapsto \psi_{\text{one}}(x+3)\psi_{\text{one}}(-x+4)$$

und man sieht, dass diese Funktion gleich 1 ist auf $[-2, 3]$ und gleich 0 außerhalb $[-4, 5]$. Durch Multiplizieren von φ



mit $\psi_{\text{one}}(\cdot+m)\,\psi_{\text{one}}(-\cdot+m)$ kann man Funktionen "glatt" ändern, um ihnen einen kompakten Träger zu geben. Die Funktion φ_m in (4.1) hat den Träger innerhalb des Trägers von $\psi_{\text{one}}(\cdot+m)\,\psi_{\text{one}}(-\cdot+m)$ liegen und dieser Träger ist $[-m-1, m+1]$.

Wir müssen jetzt noch die Konvergenz $\varphi_m \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ zeigen: Seien die Indizes k und ℓ in $\mathbb{N}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}\left\|x^k\left(\varphi_m-\varphi\right)^{(\ell)}\right\|_\infty = &\sup_{|x|>m+1}\left|x^k\varphi^{(\ell)}\right| + \\ &\sup_{m-1<x<m+1}\left|x^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell(\varphi(x)\psi_{\text{one}}(-x+m))\right| + \\ &\sup_{-m-1<x<-m+1}\left|x^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell(\varphi(x)\psi_{\text{one}}(x+m))\right|.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Auf $[-m+1, m-1]$ gilt $\varphi_m = \varphi$. Man hat für $m \to \infty$, dass für den ersten Term in (4.2) gilt

$$\sup_{|x|>m+1} \left|x^k \varphi^{(\ell)}\right| \leq \frac{1}{m+1} \sup_{|x|>m+1} \left|x^{k+1}\varphi^{(\ell)}\right| \leq \frac{1}{m+1} \left\|x^{k+1}\varphi^{(\ell)}\right\|_\infty \to 0.$$

Weil

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell (\alpha(x)\beta(x)) = \sum_{0\leq n\leq \ell} \binom{\ell}{n} \alpha^{(n)}(x)\beta^{(\ell-n)}(x)$$

und weil es für $0 \leq n \leq \ell$ eine Konstante C_ℓ gibt mit

$$\sup_{m-1<x<m+1} \left|\psi_{\text{one}}^{(\ell-n)}(-x+m)\right| = \sup_{-1<x<1} \left|\psi_{\text{one}}^{(\ell-n)}(-x)\right| \leq C_\ell$$

bei der C_ℓ also nicht von m abhängt, folgt auch hier für $m \to \infty$, dass für den zweiten Term in (4.2) gilt

$$\begin{aligned} &\sup_{m-1<x<m+1} \left|x^k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell (\varphi(x)\psi(-x+m))\right| \\ &\leq \sum_{0\leq n\leq \ell} \binom{\ell}{n} \sup_{m-1<x<m+1} \left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| C_\ell \\ &\leq \frac{C_\ell}{m-1} \sum_{n=0}^{\ell} \binom{\ell}{n} \left\|x^{k+1}\varphi^{(n)}\right\|_\infty \to 0. \end{aligned}$$

Den dritten Term in (4.2) kann man ähnlich abschätzen. Weil

$$\left\|x^k (\varphi_m - \varphi)^{(\ell)}\right\|_\infty \to 0 \text{ für } m \to \infty,$$

gilt $\varphi_m \to \varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ für $m \to \infty$. ■

Faltungen von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen sind wohl-definiert und liegen wieder in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 4.1.5 *Wenn $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, dann folgt $\varphi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Man soll zeigen, dass $\left|x^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta (\varphi * \psi)^{(\alpha)}\right|$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ beschränkt ist. Dazu reicht es, wenn man für jedes $k \in \mathbb{N}$ zeigen kann, dass

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^k}.$$

Es reicht sogar, wenn wir diese Abschätzung für k genügend groß beweisen können. Nehmen wir $k > n$. Es gibt die folgenden Abschätzungen

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M_\varphi}{\left(1+|x|^2\right)^k} \text{ und } |\psi(x)| \leq \frac{M_\psi}{\left(1+|x|^2\right)^k}.$$

Für $\varphi * \psi$ würde es reichen, wenn wir folgendes Integral abschätzen können:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|y|^2\right)^k} \frac{1}{\left(1+|x-y|^2\right)^k} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+\left|y+\frac{1}{2}x\right|^2\right)^k} \frac{1}{\left(1+\left|y-\frac{1}{2}x\right|^2\right)^k} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+\left|y+\frac{1}{2}|x|\,e_1\right|^2\right)^k} \frac{1}{\left(1+\left|y-\frac{1}{2}|x|\,e_1\right|^2\right)^k} dy. \qquad (4.3) \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus einer Rotation. Für $y_1 > 0$ gilt

$$\left|y + \tfrac{1}{2}|x|\,e_1\right| \geq |y| \text{ und } \left|y + \tfrac{1}{2}|x|\,e_1\right| \geq \tfrac{1}{2}|x|\,.$$

Wenn wir das Integral über $y_1 > 0$ und $y_1 < 0$ verteilen und jeweils das Produkt in (4.3) abschätzen durch

$$\begin{aligned} \text{Produkt} &\leq \frac{1}{\left(1+|y|^2\right)^{k/2}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}|x|^2\right)^{k/2}} \frac{1}{1} \\ &\leq C \frac{1}{(1+|y|)^k} \frac{1}{(1+|x|)^k} \end{aligned}$$

liefert dies uns

$$\begin{aligned} (4.3) &\leq C \int_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ y_1>0}} \frac{1}{(1+|y|)^k} \frac{1}{(1+|x|)^k} dy \\ &\leq C' \frac{1}{(1+|x|)^k} \int_{r=0}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^k} dr \\ &\leq C' \frac{1}{(1+|x|)^k} \int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{k+1-n}} dr \\ &= \frac{C'}{k-n} \frac{1}{(1+|x|)^k}. \end{aligned}$$

Dabei war $k > n$ beliebig. Weil das Integral wohl-definiert ist, ist auch die Differenzierbarkeit gegeben. ■

4.2 Distributionen mit kompaktem Träger

Die dritte Sorte von Distributionen betrachtet **Testfunktionen** $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ **ohne einschränkende Bedingungen für** $|x| \to \infty$. Man bezahlt dies, indem man Distributionen einen kompakten Träger gibt.

Definition 4.2.1 *Man schreibt $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ für $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der* ***Konvergenz***

$$\varphi_m \to \varphi \text{ in } \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) \text{ für } m \to \infty,$$

definiert durch: für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$\left\|(\varphi_m - \varphi)^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty(K)} \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Die Seminorm ist definiert durch

$$\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty(K)} := \sup\left\{\left|\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\tfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \varphi(x_1,\ldots,x_n)\right| ; x \in K\right\}.$$

Dies führt zu:

Definition 4.2.2 *$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge der Distributionen bestehend aus allen stetigen, linearen Abbildungen $F : \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Die Stetigkeit ist definiert durch:*

$$\begin{gathered} \varphi_m \to \varphi \text{ in } \mathscr{E}(\mathbb{R}^n) \text{ für } m \to \infty \\ \Downarrow \\ F(\varphi_m) \to F(\varphi) \text{ in } \mathbb{R} \text{ für } m \to \infty. \end{gathered}$$

Weil man durch die Konvergenz in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ nur auf kompakte Mengen schaut, ist eine lineare Abbildung von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nur stetig, wenn sie auf kompakten Mengen wirkt. Daher kommt der Name **Distribution mit kompaktem Träger**.

Sofort kann man folgern, dass

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneqq C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneqq C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

und man findet sogar, dass die Konvergenz in $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$ für $C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen schwächer ist als die Konvergenz in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen. Daher gilt

$$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n).$$

In dieser letzten Zeile kann man sogar überall $\supset$ durch $\supsetneqq$ ersetzen. Für ein Gegenbeispiel, dass $\mathscr{S}'(\mathbb{R}) \neq \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, betrachten Sie

$$F := \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n \text{ mit } \delta_n(\varphi) = \varphi(n).$$

- Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$ und $M \in \mathbb{N}$ gilt
$$|F(\varphi)| = \left|\sum_{n=0}^{M} \delta_n(\varphi)\right| \leq \sum_{n=0}^{M} |\varphi(n)| \leq M \|\varphi\|_\infty$$
und es folgt $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
- Für $\varphi \in C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R})$ gilt
$$|F(\varphi)| = \left|\sum_{n=0}^{M} \delta_n(\varphi)\right| \leq \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n^2}\left|n^2\varphi(n)\right| \leq \frac{\pi}{6}\left\|x^2\varphi\right\|_\infty$$
und es folgt $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
- Für $1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt
$$F(1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = \infty$$
wir finden $F \notin \mathscr{E}'(\mathbb{R})$.

In Proposition 3.5.2 haben wir gesehen, dass eine Distribution mit einem Punkt $\{a\} \subset \mathbb{R}^n$ als Träger nur eine endliche Kombination von partiellen Ableitungen der δ_a-Funktion an dieser Stelle sein kann. Dieses Ergebnis ist noch allgemeiner zu formulieren. Leider wird ein Beweis Ergebnisse aus der Funktionalanalysis brauchen, die wir hier leider nicht kurzfristig mal zeigen können.

Theorem 4.2.3 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ derart, dass*

$$F(\varphi) = (F_f)^{(\alpha)}(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 4.2.4 *Die Funktion f und der Index α hängen von K ab. Betrachtet man zum Beispiel $F = \sum_{n=0}^\infty \delta_n^{(n)}$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, dann hat F keinen kompakten Träger. Man kann lokal eine Formel wie in dem Theorem finden, aber nicht eine, die für alle Testfunktionen passt. Betrachtet man Testfunktionen mit Träger in der kompakten Menge $[a, b]$ mit $b \leq 1$, dann findet man*

$$F(\varphi) = \varphi(0)$$

und $F(\varphi) = \left(F_{|\cdot|/2}\right)''(\varphi)$ für φ mit solchem Träger. Wenn $a < 0$ und $b \in (1, 2)$, dann braucht man $(F_f)^{(3)}$ mit zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \in (0, 1], \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 - x & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Für φ mit Träger in $[-1, 3]$ gilt $F(\varphi) = (F_f)^{(3)}(\varphi)$. Es gibt kein f, der für alle φ funktioniert.

Aufgabe 4.2 *Kontrollieren Sie das Beispiel in der letzten Bemerkung.*

Beweis von Theorem 4.2.3. Nehmen wir an, dass $K+B_1(0) \subset [-M,M]^n$. Mit der Zerlegung der Eins gibt es $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in K + B_{1/3}(0), \\ 0 & \text{für } x \notin K + B_{2/3}(0). \end{cases}$$

Weil der Träger von F in K liegt, folgt für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dass

$$F(\varphi) = F((1-\psi)\varphi) + F(\psi\varphi) = F(\psi\varphi).$$

Weil $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, gibt es nach Proposition 3.3.1 ein $k \in \mathbb{N}$ und $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ mit für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ derart, dass

$$|F(\varphi)| = |F(\psi\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le k} \left\| (\psi\varphi)^{(\alpha)} \right\|_\infty \le$$
$$C_1 \sum_{\beta\le\alpha,\ |\alpha|\le k} \left\| \psi^{(\beta)} \varphi^{(\alpha-\beta)} \right\|_\infty \le C_2 \sum_{|\alpha|\le k} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L^\infty([-M,M]^n)}. \tag{4.4}$$

Wir dürfen uns eischränken auf $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in $[-M,M]^n$.

Jede Stelle $y \in \mathbb{R}^n$ mit mindestens ein y_i mit $|y_i| \ge M$ liegt außerhalb der Träger von solchen φ und deshalb gilt da $\varphi^{(\alpha)}(\dots, y_i, \dots) = 0$. Für solche φ und $x \in [-M,M]^n$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int_{-M}^{x_1} \partial_1\varphi(y_1, x_2, \dots, x_n) dy_1 \\ &= \int_{-M}^{x_2} \int_{-M}^{x_1} \partial_2\partial_1\varphi(y_1, y_2, \dots, x_n) dy_1 dy_2 \\ &= \dots \\ &= \int_{-M}^{x_n} \cdots \int_{-M}^{x_2} \int_{-M}^{x_1} \partial_n \cdots \partial_2\partial_1\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned} \tag{4.5}$$

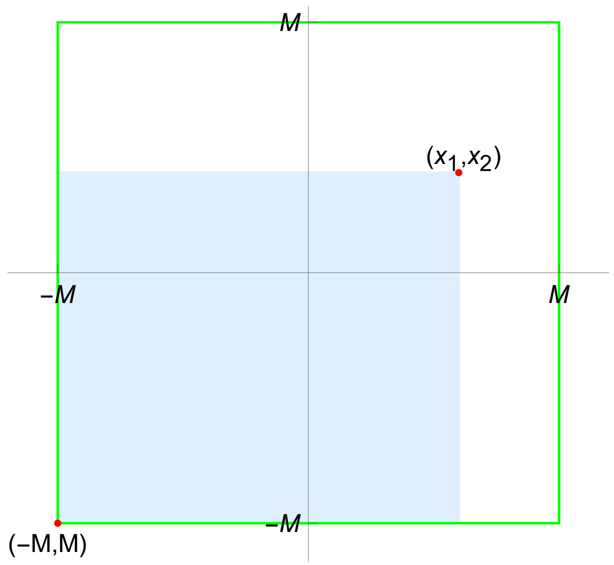


Abbildung 4.1: Bild zu (4.5) in 2d.

Dann folgt für solche φ, dass

$$\|\varphi\|_\infty \le \int_{[-M,M]^n} |\partial_n \cdots \partial_2\partial_1\varphi| \, dx. \tag{4.6}$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass für $x_i \geq -M$ gilt

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)| &\leq (x_i + M) \sup_{-M \leq t \leq x_i} |\partial_i \varphi(x_1, \dots, t \dots, x_n)| \\ &\leq 2M \|\partial_i \varphi\|_\infty . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dies liefert $\|\varphi\|_\infty \leq 2M \|\partial_i \varphi\|_\infty$ und durch wiederholte Anwendung

$$\|\partial_i \varphi\|_\infty \leq (2M)^{n-1} \|\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1 \varphi\|_\infty .$$

Wir finden dann mit (4.6), für $\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1 \varphi$ statt φ, dass

$$\begin{aligned} \|\partial_i \varphi\|_\infty &\leq (2M)^{n-1} \|\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1 \varphi\|_\infty \\ &\leq (2M)^{n-1} \int_{[-M,M]^n} \left|(\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1)^2 \varphi\right| dx. \end{aligned}$$

Also gilt für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ dass $C_{M,\alpha} \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_\infty \leq C_{M,\alpha} \int_{[-M,M]^n} \left|(\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1)^{|\alpha|+1} \varphi\right| dx.$$

Dann gilt auch wegen (4.4), dass $C^*_{M,\alpha} \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$|F(\varphi)| \leq C^*_{M,k} \int_{[-M,M]^n} \left|(\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1)^{k+1} \varphi\right| dx. \tag{4.8}$$

Definieren wir F^* auf Funktionen $(\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1)^{k+1} \varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(K)$ durch

$$F^*\left((\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1)^{k+1} \varphi\right) := F(\varphi),$$

dann ist dieses Funktional F^* linear. Wegen (4.8) gilt

$$|F^*(\psi)| \leq C^*_{M,k} \int_{[-M,M]^n} |\psi(x)| \, dx \text{ für solche } \psi, \tag{4.9}$$

die man wie folgt schreiben kann

$$\psi = (\partial_n \cdots \partial_2 \partial_1)^{k+1} \varphi \text{ mit } \varphi \in C_0^\infty(K). \tag{4.10}$$

Die Ungleichung in (4.9) gibt dann eine $L^1((-M,M)^n)$-Abschätzung auf einem Teilraum von $L^1((-M,M)^n)$, nämlich dem Teilraum der Funktionen, die sich wie in (4.10) schreiben lassen. Das sind nicht viele Funktionen verglichen mit $L^1((-M,M)^n)$, aber sie bilden einen Teilraum: Linearkombinationen solcher Funktionen liegen wieder in dem Teilraum.

*Der Vektorraum $L^1(A)$ enthält die Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$. Die zugehörige L^1-**Norm** wird definiert durch Norm*

$$\|f\|_{L^1(A)} := \int_A |f| \, d\lambda.$$

Man erinnere sich, dass das Lebesgue-Integral eine Erweiterung des Riemann-Integrals ist. Für Riemann-integrierbare Funktionen gilt also

$$\int_A |f| \, d\lambda = \int_{x \in A} |f(x)| \, dx.$$

Ein bekannter Satz aus der Funktionalanalysis, nach Hahn-Banach benannt, besagt, dass es für ein lineares Funktional G_1, definiert auf einem Teilraum V_1 eines normierten Vektorraums V und da

$$|G_1(u)| \leq C \|u\|_V \text{ für alle } u \in V_1$$

erfüllt, eine lineare Erweiterung G auf V gibt, also $G_1 = G$ auf V_1, die die ähnliche Abschätzung mit gleicher Konstante erfült:

$$|G(u)| \leq C \|u\|_V \text{ für alle } u \in V.$$

Die $L^1((-M, M)^n)$-Abschätzung in (4.9) ist nur bewiesen für wenige Funktionen in $L^1((-M, M)^n)$, nämlich nur für Funktionen ψ die (4.10) erfüllen. Durch den Satz von Hahn-Banach kann man das Funktional erweitern für alle $\psi \in L^1((-M, M)^n)$. Nennen wir diese Erweiterung ebenfalls F^*, dann ist F^* ein stetiges, lineares Funktional auf $L^1((-M, M)^n)$ auch mit der Abschätzung in (4.9).

Ein zweiter Satz aus der Funktionalanalysis, nach Steinhaus benannt, besagt, dass es für stetige, lineare Funktionale G auf $L^1(A)$ mit $A \subset R^n$ beschränkt, eine Funktion $g \in L^\infty(A)$ existiert derart, dass

$$G(\psi) = \int_A g(x)\psi(x)dx.$$

Dies bedeutet, dass es für F^* eine Funktion

$$g \in L^\infty((-M, M)^n)$$

gibt und wenn wir g außerhalb von $(-M, M)^n$ durch 0 fortsetzen, folgt

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= F^*\left((\partial_n \cdots \partial_2\partial_1)^{k+1} \varphi\right) \\ &= \int_{[-M,M]^n} g(x) (\partial_n \cdots \partial_2\partial_1)^{k+1} \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Diese Funktion g muss aber nicht stetig sein. Das schafft man, wenn man nochmals partiell integriert wie in (4.5). Setzen wir also

$$f(x) = \int_{-M}^{x_n} \cdots \int_{-M}^{x_2} \int_{-M}^{x_1} g(y_1, y_2, \ldots, y_n)dy_1dy_2 \ldots dy_n,$$

dann folgt (fast überall nach Analysis 3)

$$(\partial_n \cdots \partial_2\partial_1) f(x) = g(x)$$

und f ist Lipschitz-stetig und daher auch stetig. Wir finden für $x \in [-M, M]^n$, dass

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \int_{[-M,M]^n} g(x) (\partial_n \cdots \partial_2\partial_1)^{k+1} \varphi(x)dx \\ &= \int_{[-M,M]^n} (\partial_n \cdots \partial_2\partial_1) f(x) \ (\partial_n \cdots \partial_2\partial_1)^{k+1} \varphi(x) \ dx. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration unter Verwendung von $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ und mit der Definition einer distributionellen Ableitung folgt

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \int_{[-M,M]^n} f(x) \ (\partial_n \cdots \partial_2\partial_1)^{k+2} \varphi(x) \ dx \\ &= F_f\left(\varphi^{(k+2,k+2,\ldots,k+2)}\right) \\ &= (-1)^{(k+2)n} (F_f)^{(k+2,k+2,\ldots,k+2)} (\varphi). \end{aligned}$$

Für $\tilde{f}(x) = (-1)^{(k+2)n} f(x)$ und $\alpha = (k+2, k+2, \ldots, k+2)$ folgt das gewünschte Ergebnis. ■

Aufgabe 4.3 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ definiert durch*

$$F(\varphi) = \varphi^{(1,0)}(0,0) \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Finden Sie $f \in C(\mathbb{R}^2)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^2$ derart, dass $F = (F_f)^{(\alpha)}$.

Aufgabe 4.4 *In der letzten Aufgabe hat F einen kompakten Träger. Gibt es $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$, also mit kompaktem Träger, und $\alpha \in \mathbb{N}^2$ derart, dass $F = (F_f)^{(\alpha)}$?*

Man kann das Ergebnis in Theorem 4.2.3 anpassen für F ohne kompakten Träger.

Korollar 4.2.5 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann gibt es $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und eine stetige Funktion $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ derart, dass*

$$F(\varphi) = (F_f)^{(\alpha)}(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K.$$

Beweis. Nehme $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x) = 1$ für $x \in K$ und $\psi(x) = 0$ für $x \notin K + B_1(0)$. Dann gilt für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in K, dass $\varphi = \psi\varphi$. Man zeigt, dass $\psi.F$, definiert durch

$$(\psi.F)(\varphi) = F(\psi\varphi)$$

auch in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ liegt und eine Distribution mit kompaktem Träger ist. Für $(\psi.F)$ kann man als in Theorem 4.2.3 anwenden und deshalb gibt es f und α mit

$$(\psi.F)(\varphi) = F_f^{(\alpha)}(\varphi)$$

Dann gilt $\psi f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und

$$F(\varphi) = F(\psi\varphi) = F_f^{(\alpha)}(\varphi)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$. ■

Distributionen

Kapitel 5

Produkte

5.1 Produkt mit einer Funktion

Im Allgemeinen kann man nicht zwei Distributionen multiplizieren. Versuchen Sie mal ein Produkt von $CH\frac{1}{x}$ und δ' auf $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ vernünftig zu definieren. Man kann jedoch schon die Multiplikation einer Distribution mit einer C^∞-Funktion definieren:

Lemma 5.1.1 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f.F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ wohl-definiert durch*

$$(f.F)(\varphi) := F(f\varphi) \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.1}$$

Beweis. Wenn $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt, dann folgt $f\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f.F$ ist in (5.1) als Funktional auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wohl-definiert. Die Linearität von $f.F$ folgt direkt:

$$\begin{aligned}(f.F)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) &= F(f(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)) \\ = F(c_1 f\varphi_1 + c_2 f\varphi_2) &= c_1 F(f\varphi_1) + c_2 F(f\varphi_2) \\ &= c_1 (f.F)(\varphi_1) + c_2 (f.F)(\varphi_2).\end{aligned}$$

Der Träger von $f\varphi$ ist enthalten in dem Träger von φ. Das impliziert für $\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, dass auch $f\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ wenn $m \to \infty$. Also folgt die Stetigkeit von $f.F$ aus der von F. ■

Aufgabe 5.1 *Zeigen Sie, dass man für $f \in C(\mathbb{R})$ und $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ auch schon das Produkt $f.\delta$ definieren kann. Wieso hat man ein Problem, wenn man das Produkt eines solchen f mit $\delta' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definieren möchte?*

Lemma 5.1.2 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wenn*

$$f.F(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

dann folgt

$$x \in \operatorname{supp}(F) \implies f(x) = 0.$$

Beweis. Wenn $f(x_0) \neq 0$, dann gibt es $r > 0$ derart, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \overline{B_{2r}(x_0)}$. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_r(x_0)$ folgt mit ψ_r aus (3.13), dass

$$F(\varphi) = F(\psi_r(\cdot - x_0)\varphi) = \frac{\psi_r(\cdot - x_0)}{f(\cdot)} F(f\varphi) = 0.$$

Dann folgt $B_r(x_0) \subset O$ mit O aus Definition 3.4.3. Dies bedeutet, dass

$$\operatorname{supp}(F) = \mathbb{R}^n \setminus O \subset \mathbb{R}^n \setminus B_r(x_0)$$

und $x_0 \notin \operatorname{supp}(F)$. ■

5.2 Die Faltung mit einer Funktion

Unter bestimmten Voraussetzungen ist es möglich die Faltung zweier Distributionen zu definieren. Wir schauen uns erstmal an, wie die Faltung einer Distribution mit einer Funktion zu definieren wäre. Für eine reguläre Distribution sollte die Definition mit der üblichen Faltung übereinstimmen und das heißt:

$$(F_f * g)(\varphi) = F_{f*g}(\varphi). \tag{5.2}$$

Weil

$$\begin{aligned} F_{f*g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\ \varphi(x)\ dx \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)\ g(x-y)\ \varphi(x)\ dydx \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{x\in\mathbb{R}^n} g(x-y)\ \varphi(x)\ dx\right) dy \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_{x\in\mathbb{R}^n} g(-(y-x))\ \varphi(x)\ dx\right) dy \\ &= F_f\left(g(-\cdot) * \varphi\right) \end{aligned}$$

sieht man, dass ein extra Minus-Zeichen erscheint. Wir vereinbaren darum:

Definition 5.2.1 *Der* ***Spiegelungsoperator***

$$S : C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$$

wird festgelegt durch

$$(S(g))(x) := g(-x) \text{ für } g \in C(\mathbb{R}^n).$$

So können wir die Faltung einer Distribution mit einer Funktion wie folgt definieren:

Lemma 5.2.2 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $F * g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ wohl-definiert durch*

$$(F*g)(\varphi) := F(S(g)*\varphi) \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.3}$$

Bemerkung 5.2.3 *Die Definition in (5.3) ist so gewählt, dass wenn F eine reguläre Distribution ist, dann gilt (5.2).*

Bemerkung 5.2.4 *Wenn F eine Distribution mit kompaktem Träger ist, dann ist die Faltung in (5.3) sogar wohl-definiert für $g \in C(\mathbb{R}^n)$. In dem Fall hat $S(g)*\varphi$ generell keinen kompakten Träger.*

Beweis. Wenn $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, dann gilt auch $S(g) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und $S(g)*\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wegen (3.6) und (3.5). Also ist $F(S(g)*\varphi)$ wohl-definiert. Die Linearität zeigt man direkt. Die Stetigkeit wird impliziert durch

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (S(g)*\varphi) = \left(S(g)*\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi\right) \tag{5.4}$$

und

$$\begin{gathered} \varphi_m \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \\ \Downarrow \\ S(g)*\varphi_m \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \end{gathered}$$

Hier ist wieder benutzt worden, dass der Träger bei der Faltung zweier Funktionen mit kompaktem Träger wieder kompakt ist. Genauer gesagt, wenn $\operatorname{supp}(\varphi_m) \subset B_M(0)$ und $\operatorname{supp}(g) \subset B_K(0)$, dann gilt, weil

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\varphi(y)dy = \int_{\operatorname{supp}(\varphi)\cap(\operatorname{supp}(g)+\{x\})} g(y-x)\varphi(y)dy,$$

dass dieses Integral 0 ist, wenn $B_M(0) \cap B_K(x) = \emptyset$. Dies ist der Fall, wenn $|x| > M+K$ und daher gilt für alle m, dass

$$\operatorname{supp}(S(g) * \varphi_m) \subset B_{M+K}(0). \tag{5.5}$$

Die Konvergenz der Halbnormen $\left\| (S(g) * \varphi_m)^{(\alpha)} \right\|_\infty \to 0$ folgt mit (5.4) aus $\left\| \varphi_m^{(\alpha)} \right\|_\infty \to 0$. ■

Beispiel 5.1 Für die δ-Distribution und $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ findet man

$$\begin{aligned}(\delta * g)(\varphi) &= \delta(S(g) * \varphi) = (S(g) * \varphi)(0)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y-0)\varphi(y)dy = F_g(\varphi).\end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 *Vereinfachen Sie $(\delta' * g)(\varphi)$ für $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Theorem 5.2.5 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(F)$ kompakt. Dann gibt es $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \in \mathbb{N}^n$ derart, dass für alle $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$F * g = F_f * g^{(\beta)} = F_{f*g^{(\beta)}}.$$

Beweis. Im Beweis von Lemma 5.2.2 fanden wir, dass

$$\operatorname{supp}(S(g) * \varphi) \subset B_{M+K}(0),$$

wenn

$$\operatorname{supp}(S(g)) \subset B_M(0) \text{ und } \operatorname{supp}(\varphi) \subset B_K(0).$$

Für $G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ kann man die Ableitungen bei der Distribution $(G * g)$ an mehreren Stellen schreiben. Weil $(G * g)(\varphi) = G(S(g) * \varphi)$ und mit (5.4) folgt

$$\begin{aligned}(G * g)^{(\alpha)}(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(G * g)(\varphi^{(\alpha)})\\ &= (-1)^{|\alpha|} G\left(S(g) * \varphi^{(\alpha)}\right)\\ &= (-1)^{|\alpha|} G\left(S(g)^{(\alpha)} * \varphi\right)\\ &= G\left(S\left(g^{(\alpha)}\right) * \varphi\right) = \left(G * g^{(\alpha)}\right)(\varphi),\end{aligned}$$

jedoch auch

$$\begin{aligned}(G * g)^{(\alpha)}(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} G\left((S(g) * \varphi)^{(\alpha)}\right)\\ &= G^{(\alpha)}(S(g) * \varphi)\\ &= \left(G^{(\alpha)} * g\right)(\varphi).\end{aligned}$$

Weil für eine Distribution F mit kompaktem Träger gilt, dass $F = F_f^{(\beta)}$ für ein $\beta \in \mathbb{N}^n$ und $f \in C(\mathbb{R}^n)$ (siehe Theorem 4.2.3), bekommen wir mit (5.2), dass

$$\begin{aligned}(F * g)(\varphi) &= \left(F_f^{(\beta)} * g\right)(\varphi)\\ &= \left(F_f * g^{(\beta)}\right)(\varphi) = F_{f*g^{(\beta)}}(\varphi).\end{aligned}$$

Weil $g^{(\beta)}$ einen kompakten Träger hat ist auch $f * g^{(\beta)}$ wohldefiniert und weil $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt, folgt $f * g^{(\beta)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
■

Mit diesem Ergebnis findet man, dass Distributionen mit kompaktem Träger durch $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen zu approximieren sind.

Lemma 5.2.6 *Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Definiere für $\varepsilon \in (0,1]$ die Funktionen*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt für jede Distribution $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, dass

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F * \varphi_\varepsilon = F. \tag{5.6}$$

Beweis. Aus Theorem 5.2.5 folgt die Existenz von $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \in \mathbb{N}^n$ derart, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(F * \varphi)(\psi) = \left(F_f * \varphi^{(\beta)}\right)(\psi) = \left(F_{f*\varphi^{(\beta)}}\right)(\psi),$$

also auch für $\varphi = \varphi_\varepsilon$. Es gilt

$$(F * \varphi_\varepsilon)(\psi) = \left(F_f * \varphi_\varepsilon^{(\beta)}\right)(\psi) = F_f\left(S(\varphi_\varepsilon^{(\beta)}) * \psi\right).$$

Weil man Lemma 3.2.5 auch für $S(\varphi_\varepsilon)$ anwenden kann, gilt

$$\begin{aligned} S(\varphi_\varepsilon^{(\beta)}) * \psi &= (-1)^{|\beta|} S(\varphi_\varepsilon)^{(\beta)} * \psi \\ &= (-1)^{|\beta|} S(\varphi_\varepsilon) * \psi^{(\beta)} \to (-1)^{|\beta|} \psi^{(\beta)} \\ &\qquad\qquad \text{für } \varepsilon \downarrow 0 \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

und es folgt

$$F_f\left(S(\varphi_\varepsilon^{(\beta)}) * \psi\right) \to F_f\left((-1)^{|\beta|} \psi^{(\beta)}\right).$$

Das Letzte kann man auch schreiben als

$$(F * \varphi_\varepsilon)(\psi) \to F_f^{(\beta)}(\psi) = F(\psi),$$

oder $F * \varphi_\varepsilon \to F$ für $\varepsilon \downarrow 0$ in der schwachen Konvergenz von Distributionen. ■

5.3 Das Tensor-Produkt zweier Distributionen

Es gibt andere Arten von Produkten. Das Tensor-Produkt von Distributionen kann man definieren, ist aber etwas komplizierter als das Tensor-Produkt von Funktionen. Als Erinnerung: Für $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C(\mathbb{R}^m)$ ist das Tensor-Produkt eine Funktion in $C(\mathbb{R}^{n+m})$, definiert durch

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } y \in \mathbb{R}^m.$$

Wenn man reguläre Distributionen hat, kann man dies leicht erweitern:

$$(F_f \otimes F_g)(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f \otimes g)(x,y)\,\varphi(x,y)dxdy$$

indem man $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ schreibt. Fubini-Tonelli sagt, dass dieses Integral wohl-definiert ist und dass die Integrationfolge egal ist.

Hat man jedoch eine nicht-reguläre Distribution $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, dann beschreibt dieses Funktional die Wirkung auf $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ die Wirkung auf $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Man findet so zwar

$$(F \otimes G)(\varphi \otimes \psi) = F(\varphi)G(\psi),$$

aber das Problem ist, dass nicht alle Testfunktionen in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ als Produkt von Testfunktionen in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit Testfunktionen in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ zu schreiben sind. Es gibt etwas zu beweisen.

Proposition 5.3.1 *Sei $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Dann existiert genau ein $H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ derart, dass*

$$H(\varphi \otimes \psi) = F(\varphi)G(\psi) \tag{5.7}$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Definition 5.3.2 *Man nennt H in (5.7) das* ***distributionelle Tensor-Produkt*** *von F und G und schreibt auch $H = F \otimes G$.*

Bemerkung 5.3.3 *Für $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ definiert man $\tilde{\varphi}$ durch*

$$\tilde{\varphi}(x) := G(\Phi(x, \cdot)).$$

Im Beweis des Theorems beweist man, dass $\tilde{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, und weiter, dass

$$H(\Phi) = F(\tilde{\varphi}).$$

Beweis der Existenz von H. Sei $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Weil Φ einen kompakten Träger hat, sagen wir $\operatorname{supp}(\Phi) \subset K \subset K_1 \times K_2$ mit $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ beide auch kompakt. Dann liegt der Träger von $y \mapsto \Phi(x, y)$ in K_2 für jeden $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \mapsto \Phi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. So ist φ mit

$$\varphi(x) := G(\Phi(x, \cdot))$$

wohl-definiert in $\mathbb{R}$ für jedes x. Außerdem gilt wenn $\tilde{x} \to x$, dass $\Phi(\tilde{x}, \cdot) \to \Phi(x, \cdot)$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ und es folgt, dass

$$\varphi(\tilde{x}) = G(\Phi(\tilde{x}, \cdot)) \to \varphi(x) = G(\Phi(x, \cdot)) \text{ in } \mathbb{R}.$$

Also ist φ stetig und weil $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_1$, ist φ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Um zu zeigen, dass φ beliebig oft differenzierbar ist, verwendet man die Linearität und die Stetigkeit von G: Für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x + hv) - \varphi(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{G(\Phi(x + hv, \cdot)) - G(\Phi(x, \cdot))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} G\left(\frac{\Phi(x + hv, \cdot) - \Phi(x, \cdot)}{h}\right) \\
&= G\left(\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x + hv, \cdot) - \Phi(x, \cdot)}{h}\right) \\
&= G\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}(x, \cdot)\right).
\end{aligned}$$

Die Ableitungen erster Ordnung von φ existieren und man weiß, wie diese zu berechnen sind. Mit Induktion folgt, dass höhere Ableitungen von φ existieren und für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (und $0 \in \mathbb{N}^m$) gilt:

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = G\left(\Phi^{(\alpha,0)}(x, \cdot)\right).$$

Wir haben eine Abbildung

$$\mathcal{G} : \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

konstruiert durch $\mathcal{G}(\Phi)(x) := G(\Phi(x,\cdot))$. Weil G linear ist, ist auch $\mathcal{G}$ linear.

Die Abbildung $\mathcal{G}$ ist auch stetig: Wenn $\Phi_\ell \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, dann darf man annehmen, dass die Träger von Φ_ℓ alle in $K_1 \times K_2$ liegen, wie oben, und die $\mathcal{G}(\Phi_\ell)$ haben einen Träger in K_1. Wenn für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $\beta \in \mathbb{N}^m$ gilt

$$\left\| \Phi_\ell^{(\alpha,\beta)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \to 0 \text{ für } \ell \to \infty$$

dann folgt auch

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \Phi_\ell^{(\alpha,\beta)}(x,\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \to 0 \text{ für } \ell \to \infty.$$

Für Testfunktionen $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subset K_2$ gibt es wegen Proposition 3.3.1 die Abschätzung

$$|G(\psi)| \le C_{K_2} \sum\nolimits_{|\beta| \le k_{K_2}} \left\| \psi^{(\beta)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}$$

und daher

$$\left\| \mathcal{G}(\Phi_\ell)^{(\alpha)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| G\left(\Phi_\ell^{(\alpha,0)}(x,\cdot) \right) \right| \le$$
$$C_{K_2} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum\nolimits_{|\beta| \le k_{K_2}} \left\| \Phi_\ell^{(\alpha,\beta)}(x,\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \to 0 \text{ für } \ell \to \infty.$$

Weil $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist $H := F \circ \mathcal{G} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ wohl-definiert. Wenn $\Phi(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, dann folgt

$$H(\Phi) = F(\varphi)G(\psi)$$

und folgt, dass H die genannten Eigenschaften hat. ■

Bevor wir behaupten dürfen, dass H die einzige Möglichkeit ist, brauchen wir ein Lemma:

Lemma 5.3.4 *Sei $H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ derart, dass*

$$H(\varphi \otimes \psi) = 0$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$. Dann folgt $H = 0$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $H \neq 0$ und zeigen einen Widerspruch. Wenn $H \neq 0$, dann gibt es ein $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ mit $H(\Phi) \neq 0$. Dann muss H irgendwo lokal ungleich 0 sein. Wenn Ψ_r die Funktion aus (3.13) setzen wir $\gamma_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ durch

$$\gamma_\varepsilon(x,y) := \varepsilon^{-n-m} \Psi_\varepsilon(x - x_0) \Psi_\varepsilon(y - y_0)$$

und dann gibt es $(x_0, y_0) \in \operatorname{supp}(\Phi)$ mit

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \gamma_\varepsilon.H(\Phi) = c_1 \neq 0. \tag{5.8}$$

Sonst folgt ein Widerspruch mit (5.6). Für ein $c \in \mathbb{R}^+$, unabhängig von ε, gilt übrigens

$$\left\| \gamma_\varepsilon^{(\alpha)} \right\|_\infty \le c \varepsilon^{-|\alpha| - n - m}.$$

Wir schauen uns die Distribution $\gamma_\varepsilon.H$ an. Der Träger von $\gamma_1.H$ liegt in $B_2(x_0) \times B_2(y_0)$ und daher gibt es die Abschätzung

$$|(\gamma_1.H)(\Psi)| \le C \sum_{|\beta| \le k} \left\| \Psi^{(\beta)} \right\|_{L^\infty(B_2(x_0) \times B_2(y_0))}$$
$$\text{für alle } \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Für $\gamma_\varepsilon.H$ mit $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ gilt $\gamma_1\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$ und es folgt, dass

$$(\gamma_\varepsilon.H)(\Psi) = (\gamma_1\gamma_\varepsilon.H)(\Psi) = (\gamma_1.H)(\gamma_\varepsilon\Psi)$$

und

$$\begin{aligned} |\gamma_\varepsilon.H(\Psi)| &\le C \sum_{|\beta|\le k} \left\| (\gamma_\varepsilon\Psi)^{(\beta)} \right\|_{L^\infty(B_2(x_0)\times B_2(y_0))} \\ &\le \tilde{C} \sum_{|\beta|\le k} \sum_{0\le\alpha\le\beta} \left\| \gamma_\varepsilon^{(\alpha)} \Psi^{(\beta-\alpha)} \right\|_{L^\infty(B_{2\varepsilon}(x_0)\times B_{2\varepsilon}(y_0))} \\ &\le \tilde{C} \sum_{|\beta|\le k} \sum_{0\le\alpha\le\beta} \varepsilon^{-|\alpha|-n-m} \left\| \Psi^{(\beta-\alpha)} \right\|_{L^\infty(B_{2\varepsilon}(x_0)\times B_{2\varepsilon}(y_0))} \end{aligned} \tag{5.9}$$

für alle $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$.

Vergleichen wir die oben genannte Funktion Φ mit deren Taylor-Polynom T_Φ von Ordnung $k+n+m$ an der Stelle (x_0, y_0), so folgt aus dem Satz von Taylor (siehe Seite 29), dass

$$\|\Phi - T_\Phi\|_{L^\infty(B_{2\varepsilon}(x_0)\times B_{2\varepsilon}(y_0))} \le C_\Phi \; \varepsilon^{k+n+m+1}$$

und sogar für $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^{n+m}$, dass

$$\left\| (\Phi - T_\Phi)^{(\beta-\alpha)} \right\|_{L^\infty(B_{2\varepsilon}(x_0)\times B_{2\varepsilon}(y_0))} \le \tilde{C}_\Phi \; \varepsilon^{k+n+m+1-|\beta-\alpha|}. \tag{5.10}$$

Das Taylorpolynom T_Φ liegt nicht in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, aber $\gamma_1 T_\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Mit (5.9) folgt dann

$$\begin{aligned} &|\gamma_\varepsilon.H(\Phi - \gamma_1 T_\Phi)| \\ &\le \tilde{C} \sum_{|\beta|\le k} \sum_{0\le\alpha\le\beta} \varepsilon^{-|\alpha|-n-m} \left\| (\Phi - \gamma_1 T_\Phi)^{(\beta-\alpha)} \right\|_{L^\infty(B_{2\varepsilon}(x_0)\times B_{2\varepsilon}(y_0))} \\ &= \tilde{C} \sum_{|\beta|\le k} \sum_{0\le\alpha\le\beta} \varepsilon^{-|\alpha|-n-m} \left\| (\Phi - T_\Phi)^{(\beta-\alpha)} \right\|_{L^\infty(B_{2\varepsilon}(x_0)\times B_{2\varepsilon}(y_0))} \\ &\le C_\Phi^* \sum_{|\beta|\le k} \sum_{0\le\alpha\le\beta} \varepsilon^{-|\alpha|-n-m} \varepsilon^{k+n+m+1-|\beta-\alpha|} \\ &= C_\Phi^* \sum_{|\beta|\le k} \sum_{0\le\alpha\le\beta} \varepsilon^{k+1-|\beta|} = C_{\Phi,k}^{**} \sum_{|\beta|\le k} \varepsilon^{k+1-|\beta|} \le C_{\Phi,k}^{***} \; \varepsilon. \end{aligned}$$

Kombinieren wir mit (5.10), dann finden wir

$$\begin{aligned} |\gamma_\varepsilon.H(\Phi)| &\le |\gamma_\varepsilon.H(\Phi - \gamma_1 T_\Phi)| + |\gamma_\varepsilon.H(\gamma_1 T_\Phi)| \\ &\le C_{\Phi,k}^{***} \; \varepsilon + |H(\gamma_\varepsilon T_\Phi)|. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Weil

$$\begin{aligned} &\gamma_\varepsilon(x,y) T_\Phi(x,y) \\ &= \varepsilon^{-n-m} \Psi_\varepsilon(x - x_0) \Psi_\varepsilon(y - y_0) \sum_{|(\alpha,\beta)|\le k} c_{\alpha,\beta} (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta \\ &= \varepsilon^{-n-m} \sum_{|(\alpha,\beta)|\le k} c_{\alpha,\beta} \Big((x - x_0)^\alpha \, \Psi_\varepsilon(x - x_0) \Big) \Big((y - y_0)^\beta \, \Psi_\varepsilon(y - y_0) \Big), \end{aligned}$$

sieht man eine Summe von Tensor-Produkt-Funktionen erscheinen,

$$\gamma_\varepsilon(x,y) T_\Psi(x,y) = \varepsilon^{-n-m} \sum_{|(\alpha,\beta)|\le k} c_{\alpha,\beta} \left(\bar{\varphi}_\alpha \otimes \bar{\psi}_\beta \right)(x,y),$$

und es folgt mit der Linearität, dass

$$H\left(\sum\nolimits_{|(\alpha,\beta)|\le k} c_{\alpha,\beta}\left(\bar{\varphi}_i\otimes\bar{\psi}_i\right)\right)=\sum_{|(\alpha,\beta)|\le k} c_{\alpha,\beta}H\left(\bar{\varphi}_i\otimes\bar{\psi}_i\right)=0.$$

Also gilt $|H(\gamma_\varepsilon T_\Phi)|=0$ und der Widerspruch folgt dann aus (5.8) und (5.11) für ε genügend klein. ■

Mit dem letzten Lemma kann man den Beweis der Proposition fertig stellen.

Beweis der Eindeutigkeit für Proposition 5.3.1. Wenn H_1 und H_2 beide ein distributionelles Tensor-Produkt von $F\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $G\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ sind, dann gilt für

$$H_0=H_1-H_2,$$

und alle $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, dass

$$\begin{aligned}H_0(\varphi\otimes\psi)&=H_1(\varphi\otimes\psi)-H_2(\varphi\otimes\psi)\\&=F(\varphi)G(\psi)-F(\varphi)G(\psi)=0\end{aligned}$$

und mit Lemma 5.3.4, dass $H_0=0$. ■

Für die Dirac-δ-Distribution schreibt man kurz δ, oder wenn man betonen möchte, dass sie in 0 wirkt, auch δ_0. Wenn man eine ähnliche Distribution an der Stelle $a\in\mathbb{R}^n$ haben möchte, verwendet man δ_a:

$$\delta_a(\varphi)=\varphi(a).$$

Im nächsten Lemma kombiniert man $\delta_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\delta_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ zu $\delta_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Das macht eine wirre Notation und deshalb hängen wir noch einen Index an. Gemeint ist jedes Mal die Dirac-δ-Distribution, in jedoch verschiedenen Dimensionen.

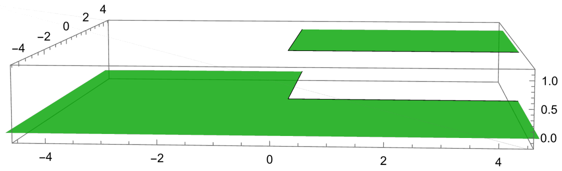


Abbildung 5.1: Skizze zu $(x_1,x_2)\mapsto H(x_1)H(x_2)$

Lemma 5.3.5 *Wenn $\delta_{0,x}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\delta_{0,y}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, dann gilt*

$$\delta_{0,x}\otimes\delta_{0,y}=\delta_{0,(x,y)}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Beweis. Für alle Testfunktionen $\Phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, die sich schreiben lassen als $\Phi=\varphi\otimes\psi$, also

$$\Phi(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$$

mit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, folgt

$$\begin{aligned}(\delta_{0,x}\otimes\delta_{0,y})(\varphi\otimes\psi)&=\delta_{0,x}(\varphi)\delta_{0,y}(\psi)\\&=\varphi(0)\psi(0)=\delta_{0,(x,y)}(\varphi\otimes\psi).\end{aligned}$$

Wenn $\delta_{0,x}\otimes\delta_{0,y}=\delta_{0,(x,y)}$ für alle Tensor-Produkte von Testfunktionen in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, dann gilt, wegen der Eindeutigkeit von Lemma 5.3.4, die Gleichheit für alle Testfunktionen in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. ■

Aufgabe 5.3 *Sei $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Heaviside-Funktion und setze*

$$\mathbf{1}_{(\mathbb{R}^+)^n}(x):=\prod\nolimits_{i=1}^n H(x_i),$$

die Indikatorfunktion von $(\mathbb{R}^+)^n$. Sei

$$F_{\mathbf{1}_{(\mathbb{R}^+)^n}}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

die zugehörige reguläre Distribution und sei δ_0 die Dirac-δ-Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Für $\mathbb{R}^2$ findet man eine Skizze in Abbildung 5.1.

1. *Zeigen Sie, dass*
$$F^{(1,1,\dots,1)}_{\mathbf{1}_{(\mathbb{R}^+)^n}} = \delta_0.$$
2. *Für $n = 2$ sieht man in dem Bild Sprünge in der Funktion $(x_1, x_2) \mapsto H(x_1)H(x_2)$ bei den positiven reellen Achsen. Bei der Ableitung der regulären Distribution gibt es dann meistens eine nicht-reguläre Distribution. Wieso ist der Träger von $F^{(1,1)}_{\mathbf{1}_{(\mathbb{R}^+)^2}}$ trotzdem nur $\{(0,0)\}$?*

5.4 Faltung zweier Distributionen

Die Faltung einer Distribution mit einer Funktion wurde definiert durch
$$(F * g)(\varphi) = F\left(\int_{y\in\mathbb{R}^n} g(y-\cdot)\varphi(y)dy\right).$$
Wenn wir für zwei Distributionen die Faltung definieren möchten, dann sollte das Ergebnis auch hier bei einer regulären Distribution passen. Also für $G = F_g$ sollen wir Folgendes bekommen:
$$(F * G)(\varphi) = F\left(\int_{y\in\mathbb{R}^n} g(y-\cdot)\varphi(y)dy\right).$$
Es gilt
$$\int_{y\in\mathbb{R}^n} g(y-x)\varphi(y)dy = \int_{y\in\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(x+y)dy = G(\varphi(x+\cdot))$$
und wenn wir ausnahmsweise die Koordinaten hereinschreiben, führt dies zu
$$(F * G)(\varphi) = \left(F_{(x)} \otimes G_{(y)}\right)(\varphi(x+y)). \tag{5.12}$$
Das erste Problem dient sich sofort an. Wenn $\operatorname{supp}(\varphi) = K$, dann hat $\Phi(x,y) := \varphi(x+y)$ den folgenden Träger:
$$\operatorname{supp}(\Phi) = \{(x,y)\,;\, x+y \in K\}$$
und dieser Träger ist, außer wenn $\operatorname{supp}(\varphi) = \emptyset$, immer unbeschränkt.

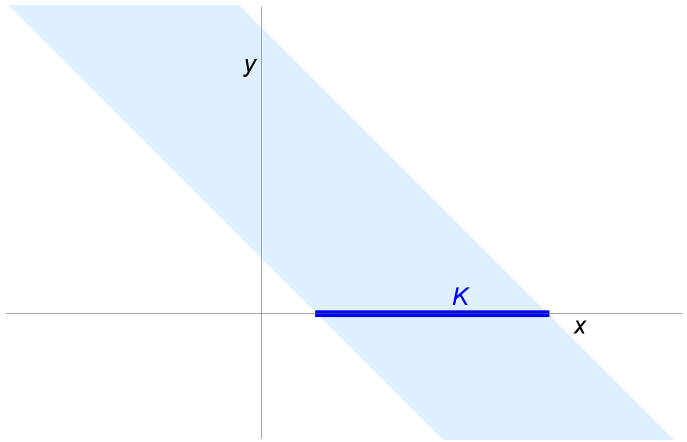


Abbildung 5.2: Als Streifen dargestellt der Träger von φ und der Träger von Φ als unbeschränktes Band.

Man soll sich dann auch nicht wundern, dass es eine Bedingung braucht, damit die Faltung definiert ist. Das war auch bei Funktionen schon der Fall.

Theorem 5.4.1 *Sei $F, G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Wenn $\operatorname{supp}(G)$ kompakt ist, dann ist $F * G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ wohl-definiert durch (5.12).*

Bemerkung 5.4.2 *Wenn* $\mathrm{supp}\,(F)$ *kompakt ist, vertauscht man* F *und* G *und definiert* $G * F$. *Wenn* $\mathrm{supp}\,(G)$ *und* $\mathrm{supp}\,(F)$ *kompakt sind, kann man zeigen, dass* $F * G = G * F$.

Beweis. Nehmen wir also an, dass G einen kompakten Träger hat. Fixiere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $G\,(\varphi\,(x+\cdot))$ wohl-definiert und eine Funktion von x. Diese Funktion liegt in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denn es gilt, wegen der Linearität von G und der Stetigkeit von G, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{G\,(\varphi\,(x+te_i+\cdot)) - G\,(\varphi\,(x+\cdot))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} G\left(\frac{\varphi\,(x+te_i+\cdot) - \varphi\,(x+\cdot)}{t}\right) \\
&= G\left(\lim_{t\to 0} \frac{\varphi\,(x+te_i+\cdot) - \varphi\,(x+\cdot)}{t}\right) \\
&= G\left(\varphi^{(e_i)}(x+\cdot)\right) = -G^{(e_i)}\left(\varphi(x+\cdot)\right).
\end{aligned}$$

Mit Induktion folgt die Existenz aller Ableitungen. Weil $G\,(\varphi\,(x+\cdot)) = 0$ außerhalb von der kompakten Menge

$$K := \mathrm{supp}\,(\varphi) + (-\mathrm{supp}\,(G))\,,$$

folgt $\mathrm{supp}\,(x \mapsto G\,(\varphi\,(x+\cdot))) \subset K$. Also gilt

$$(x \mapsto G\,(\varphi\,(x+\cdot))) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Weil $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und

$$(x \mapsto G\,(\varphi\,(x+\cdot))) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist $\left(F_{(x)} \otimes G\right)(\varphi\,(x+\cdot))$ wohl-definiert und durch (5.12) ist dann auch $(F * G)\,(\varphi)$ wohl-definiert.

Die Linearität von $F * G$ folgt direkt.

Für die Stetigkeit bemerkt man, dass aus

$$\varphi_m \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n),$$

wegen des kompakten Trägers und der Differenzierbarkeit von $x \mapsto G\,(\varphi_m\,(x+\cdot))$, auch folgt:

$$\Big(x \mapsto G\,(\varphi_m\,(x+\cdot))\Big) \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt $(F * G)\,(\varphi_m) := \left(F_{(x)} \otimes G\right)(\varphi_m\,(x+\cdot)) \to 0$ für $m \to \infty$ und $F * G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Man kann eine schärfere Bedingung formulieren für die Existenz von $F * G$: Wenn für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$\{(x,y)\,;\, x \in \mathrm{supp}\,(F)\,, y \in \mathrm{supp}\,(G)\,, x+y \in K\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

beschränkt ist, dann ist $F \otimes G$ als Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ wohl-definiert für $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Das heißt nicht sofort, dass die Definition in (5.12) wohl-definiert ist für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, denn $(x,y) \mapsto \varphi\,(x+y)$ hat keinen kompakten Träger. Um die Definition trotzdem zu benutzen, muss man balancieren zwischen $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^{2n})$ und $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ für $F \otimes G$ und zwischen $\mathscr{E}(\mathbb{R}^{2n})$ und $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ für Φ.

Korollar 5.4.3 *Sei* $F, G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. *Wenn*

$$\mathrm{supp}\,(F)\,, \mathrm{supp}\,(G) \subset [a,\infty)$$

für irgendein $a \in \mathbb{R}$, *dann ist* $F * G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *wohl-definiert durch (5.12).*

Beweis. Sei $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \subset [-M, M]$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\{(x,y)\,; x \in \operatorname{supp}(F), y \in \operatorname{supp}(G), x+y \in K\} \\
&\subset \{(x,y)\,; x \geq a, y \geq a, x+y \leq M\} \\
&\subset \{(x,y)\,; a \leq x \leq M-a, a \leq y \leq M-a\} \\
&= [a, M-a]^2 .
\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Theorem 5.4.1 findet man, dass

$$(x \mapsto G(\varphi(x+\cdot))) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Es folgt, dass $G(\varphi(x+\cdot)) = 0$ außerhalb von $\operatorname{supp}(\varphi) + (-\infty, -a]$. Diese Menge ist nach rechts beschränkt und weil $\operatorname{supp}(F) \subset [a, \infty)$, folgt, dass

$$K := (\operatorname{supp}(\varphi) + (-\infty, -a]) \cap [a, \infty)$$

kompakt ist. Das reicht, um den Beweis wie bei Theorem 5.4.1 zu vervollständigen. ■

Aufgabe 5.4 *Zeigen Sie Folgendes:*

1. $F * \delta = F$ *für* $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
2. $F * \delta^{(\alpha)} = F^{(\alpha)}$ *für* $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 5.4.4 *Seien $F, G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ beide mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$(F * G)^{(\alpha)} = F * G^{(\alpha)} = F^{(\alpha)} * G.$$

Aufgabe 5.5 *Zeigen Sie dieses Lemma.*

Lemma 5.4.5 *Seien $F, G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ beide mit dem Träger in $[a, \infty)$. Dann gilt*

$$(F * G)^{(m)} = F * G^{(m)} = F^{(m)} * G.$$

Aufgabe 5.6 *Zeigen Sie dieses Lemma.*

Nachdem wir die Faltung für zwei Distributionen definiert haben, kann man das wiederholen. Wenn F, G, H Distributionen mit kompaktem Träger sind, kann man erst $G * H$ und anschließend $F * (G * H)$ definieren. Man kann beweisen, dass

$$F * (G * H) = (F * G) * H$$

und das bedeutet, dass das Faltungsprodukt assoziativ ist und man kann also die Klammer weglassen. Es gilt sogar, dass

$$(F * G * H)(\varphi) = \left(F_{(x)} \otimes G_{(y)} \otimes H_{(z)}\right)(\varphi(x+y+z)) .$$

Distributionen

Kapitel 6

Faltungs-Gleichungen

6.1 Faltungs-Algebra

Für Distributionen mit kompaktem Träger in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ haben wir gesehen, dass man eine Faltung definieren kann und sie hat folgende Eigenschaften:

1. $F * \delta = F$;
2. $F * G = G * F$;
3. $(F * G) * H = F * (G * H)$.
4. $(F * G)^{(\alpha)} = F^{(\alpha-\beta)} * G^{(\beta)}$ für $\beta \le \alpha$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Lemma 6.1.1 *Nehme an $F, G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ haben beide einen kompakten Träger. Dann hat $F * G$ auch einen kompakten Träger und*

$$\operatorname{supp}(F * G) \subset \operatorname{supp}(F) + \operatorname{supp}(G).$$

Neben der Addition und Multiplikation mit einem Skalar können wir manchmal auch das Faltungsprodukt definieren für Distributionen. Wenn $F * G$ wieder vom gleichen Typ ist, hat man eine Algebra.

- Die Distributionen in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit der Faltung $*$ bilden eine **Faltungs-Algebra**.
- Setzt man $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ für die Distributionen mit Träger in $[0, \infty)$, so bekommt man auch hier mit dem Faltungsprodukt eine Faltungs-Algebra.

In einer Faltungs-Algebra kann man versuchen Gleichungen zu lösen wie

$$F * X = G,$$

mit F, G gegeben und X gesucht.

Lemma 6.1.2 *Sei F in der Faltungs-Algebra. Die Gleichung $F * X = G$ kann man nur lösen für alle G in der Faltungs-Algebra, wenn F eine Inverse hat, das heißt, es existiert F^{-1}*

in der Faltungs-Algebra mit

$$F^{-1} * F = F * F^{-1} = \delta.$$

Für die Lösung gilt $X = F^{-1} * G$.

Beweis. Wenn F^{-1} in der Faltungs-Algebra existiert, dann gilt

$$F * \left(F^{-1} * G\right) = \left(F * F^{-1}\right) * G = \delta * G = G$$

und $X = F^{-1} * G$ ist eine Lösung.

Wenn die Gleichung für alle G eine Lösung hat, dann auch für δ und diese Lösung ist F^{-1}. ■

6.2 Lineare GDGL

Betrachte die folgende lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + a_2 u^{(n-2)}(x) + \cdots + a_n u(x) = 0. \quad (6.1)$$

Benutzt man den Differentialoperator

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-k}$$

mit $a_0 = 1$, dann wird die Differentialgleichung $Lu = 0$. So eine GDGL n-ter Ordnung braucht n unabhängige Bedingungen, um eine eindeutige Lösung zu haben und das können zum Beispiel die Anfangsbedingungen sein:

$$u(0) = c_0,\ u'(0) = c_1,\ \ldots,\ u^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Für jedes n-Tupel $\{c_i\}_{i=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ hat die Differentialgleichung genau eine Lösung, die diese Anfangsbedingungen erfüllt.

Eine besondere Rolle hat das Anfangswertproblem

$$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0 \text{ und } u^{(n-1)}(0) = 1. \quad (6.2)$$

Es gilt Folgendes:

Lemma 6.2.1 *Sei* $U \in C^n[0,\infty)$ *die Lösung von (6.1-6.2) und* $f \in C[0,\infty)$. *Erweitere* U *und* f *für* $x < 0$ *durch* 0.
Dann wird die Lösung u *von*

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x) \text{ für } x > 0, \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = u^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

gegeben in distributionellem Sinn von $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ *durch*

$$F_u = F_U * f. \quad (6.4)$$

Bemerkung 6.2.2 *Die erweiterte Funktion* U *ist nur in* $C^{n-2}(\mathbb{R})$, *und dann direkt* LU *betrachten, ist mathematisch fragwürdig. Ist man unbekümmert dadurch, weil* $LF_U = \delta_0$ *(ein* 1*-Sprung in der* $(n-1)$*-ste Ableitung sorgt bei der* n*-te Ableitung für* δ_0*) als Distribution schon existiert, dann tut man wie folgt:*

$$\begin{aligned} LF_u &= L\left(F_U * f\right) = \left(LF_U * f\right) \\ &= \delta * f = \delta * F_f = F_f. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Beweis. Wir nehmen an, dass schon bekannt ist, dass Problem (6.3) eine eindeutige Lösung hat und beweisen nur, dass man diese Lösung bekommt durch die Konstruktion in (6.4).

Im Beweis schreiben wir eigentlich die Schritte in der Bemerkung nun detailliert auf. Weil wir hier nur an Lösungen auf $\mathbb{R}^+$ interessiert sind, betrachten wir die Testfunktionen $\mathscr{D}_+(\mathbb{R})$.

Für $\varphi \in \mathscr{D}_+(\mathbb{R})$ mit Träger in $(0, M)$ gilt

$$\begin{aligned}(F_U * f)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} U(x) \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\varphi(y)dydx \\ &= \int_0^M \left(\int_{x=0}^y U(x) f(y-x)dx \right) \varphi(y)dy \\ &= \int_0^M \left(\int_{z=0}^y U(y-z) f(z)dz \right) \varphi(y)dy.\end{aligned}$$

Wenn wir die Funktion

$$y \mapsto u(y) := \int_{z=0}^y U(y-z)f(z)dz \tag{6.6}$$

differenzieren, folgt

$$\begin{aligned}u^{(1)}(y) &= U(0)f(y) + \int_{z=0}^y U^{(1)}(y-z)f(z)dz \\ &= \int_{z=0}^y U^{(1)}(y-z)f(z)dz, \\ u^{(2)}(y) &= U^{(1)}(0)f(y) + \int_{z=0}^y U^{(2)}(y-z)f(z)dz \\ &= \int_{z=0}^y U^{(2)}(y-z)f(z)dz, \\ &\dots \\ u^{(n-1)}(y) &= U^{(n-2)}(0)f(y) + \int_{z=0}^y U^{(n-1)}(y-z)f(z)dz \\ &= \int_{z=0}^y U^{(n-1)}(y-z)f(z)dz\end{aligned}$$

und erst bei der nächsten Ableitung folgt, weil $U^{(n-1)}(0) = 1$, dass

$$u^{(n)}(y) = f(y) + \int_{z=0}^y U^{(n)}(y-z)f(z)dz.$$

Mit der Definition (6.6) und der Liste der Ableitungen sieht man auch, dass $u^{(k)}(0) = 0$ für $0 \le k \le n-1$.

Wir finden für $k \le n-1$, dass

$$(F_U * f)^{(k)}(\varphi) = \int_0^M \int_{z=0}^y U^{(k)}(y-z)f(z)dz\varphi(y)dy$$

und für $k = n$, dass

$$\begin{aligned}&(F_U * f)^{(n)}(\varphi) = \\ &\qquad \int_0^M \left(f(y) + \int_{z=0}^y U^{(k)}(y-z)f(z)dz \right) \varphi(y)dy.\end{aligned}$$

Als distributionelle Ableitung folgt

$$\begin{aligned}&L(F_U * f)(\varphi) \\ &\quad = \int_0^M \left(f(y) + \int_{z=0}^y LU(y-z)f(z)dz \right) \varphi(y)dy \\ &\quad = \int_0^M f(y)\varphi(y)dy.\end{aligned}$$

Das Ergebnis $Lu = f$ hätte man auch schon direkt für u in (6.6) aus der Liste der Ableitungen folgern können. ■

Für homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten $Lu = 0$ mit L in (6.1) findet man alle Lösungen, indem man die Nullstellen der charakteristischen Gleichung bestimmt:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Der Haupsatz der Algebra liefert die Existenz von n Nullstellen: Nehmen wir wiederun $a_0 = 1$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \geq 1$, dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j)\,. \tag{6.7}$$

Unabhängige Lösungen von $Lu = 0$ sind dann $u_j(x) = e^{\lambda_j x}$. Wenn die gleiche Nullstelle λ_j mehrmals vorkommt, sagen wir, λ_j ist eine Nullstelle mit Multiplizität $\ell > 1$, dann hat man neben $e^{\lambda_j x}$ als unabhängige Lösungen außerdem

$$\left\{ x e^{\lambda_j x}, x^2 e^{\lambda_j x}, \dots, x^{\ell-1} e^{\lambda_j x} \right\}.$$

Jedenfalls gibt es n unabhängige Lösungen $u_k(\cdot)$ von relativ einfacher Form.

Man findet dann das U aus Lemma 6.2.1 durch eine Kombination dieser elementaren Funktionen, genauer gesagt:

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x)$$

mit den c_j bestimmt durch

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) & \cdots & u_n(0) \\ u_1{}'(0) & u_2'(0) & & u_n'(0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-2)}(0) & u_2^{(n-2)}(0) & & u_n^{(n-2)}(0) \\ u_1^{(n-1)}(0) & u_2^{(n-1)}(0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann jedoch auch $Lu = f$ in mehreren Schritten lösen. Statt $Lu = f$ betrachtet man mit der gleichen Zerlegung als in (6.7), nämlich

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-k} u = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_j\right) u,$$

und löst

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_j\right) u = f$$

durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_1\right) u_1 &= u_0 := f, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_2\right) u_2 &= u_1, \\ &\vdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_n\right) u_n &= u_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Lösung der einzelnen Schritte ist jeweils gegeben durch

$$F_{u_j} = F_{\mathsf{e}_j} * u_{j-1}$$

mit

$$\mathsf{e}_j(x) = \begin{cases} \exp(\lambda_j x) & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

und die Lösung u von (6.3) folgt durch

$$F_u = F_{\mathsf{e}_n} * F_{\mathsf{e}_{n-1}} * \cdots * F_{\mathsf{e}_1} * f.$$

Beispiel 6.1 Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(x) - 2u(x) = f(x) \text{ mit } x > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

wird gelöst via $U(x) = e^{2x}$ für $x \geq 0$, erweitert durch 0 für $x < 0$ und $F_u = F_U * f$, mit auch hier f erweitert durch 0 für $x < 0$. Man findet für $\varphi \in \mathscr{D}_+(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(F_U * f)(\varphi) &= \int_{x\in\mathbb{R}} U(x) \int_{y\in\mathbb{R}} f(y-x)\varphi(y)dydx \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}} \left(\int_{x\in\mathbb{R}} U(x)f(y-x)dx\right)\varphi(y)dy \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}} \left(\int_{x=0}^{y} e^{2x}f(y-x)dx\right)\varphi(y)dy\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}u(y) &= \int_{x=0}^{y} e^{2x}f(y-x)dx = \int_{\tilde{x}=0}^{y} e^{2(y-\tilde{x})}f(\tilde{x})d\tilde{x} \\ &= e^{2y}\int_{x=0}^{y} e^{-2x}f(x)dx.\end{aligned}$$

Wenn man kontrolliert, findet man $u(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}u'(y) &= 2e^{2y}\int_{x=0}^{y} e^{-2x}f(x)dx + e^{2y}\left(e^{-2y}f(y)\right) \\ &= 2u(y) + f(y).\end{aligned}$$

Aufgabe 6.1 *Finden Sie eine Lösungsformel in der Form eines Integrals (also ohne Distributionen) für*

$$\begin{cases} u''(x) - 2u'(x) + u(x) = f(x) \text{ mit } x > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

1. *durch* $F_u = F_U * f$ *und*
2. *durch* $F_u = F_{\mathsf{e}} * F_{\mathsf{e}} * f$ *mit* $\mathsf{e}(x) = e^x$ *für* $x \geq 0$ *und erweitert durch* 0.

Aufgabe 6.2 *Es ist nichts gesagt worden, wenn die charakteristische Gleichung komplexe Wurzeln hat. Versuchen Sie eine Lösungsformel in der Form eines Integrals zu finden für die Lösung* u *von*

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f(x) \text{ mit } x > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

6.3 Evolutionsgleichungen

Die zeitabhängige Wärmeleitungsgleichung

$$(\partial_t - \Delta)\, u(x,t) = 0$$

ist eine Evolutionsgleichung. Die Rolle der t-Variablen ist wesentlich verschieden von den Raumvariablen $x = (x_1, \dots, x_n)$. Für das Anfangswertproblem in (2.7) wurde eine Lösungsformel gegeben in (2.8). Eine solche Lösungsformel gibt es sogar in n Raum-Dimensionen:

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{y\in\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy \qquad (6.8)$$

und (6.8) liefert eine Lösung von

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta u(x,t) & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (6.9)$$

Wie in Lemma 6.2.1 kann man diese Formel verwenden für das inhomogene Wärmeleitungsproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t) & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6.10}$$

Lemma 6.3.1 *Sei $f \in C\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right)$ und*

$$U(x,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0.$$

Dann ist

$$u(x,t) = \int_{s=0}^t \int_{y\in\mathbb{R}^n} U\left(x-y, t-s\right) f(y,s)dsdy$$

eine Lösung von (6.10).

Beweis. Wir verwenden die Erweiterung

$$U(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \le 0, \end{cases}$$

und bemerken, wenn man die Zeit als Parameter auffasst, dass gilt

$$\lim_{t\downarrow 0} F_{U(\cdot,t)}\left(\varphi\right) := \delta_0(\varphi) \text{ für } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

und dann auch

$$\lim_{t\downarrow 0} F_{U(\cdot-y,t)}\left(\varphi\right) := \delta_y(\varphi) \text{ für } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \tag{6.11}$$

Als Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ hat man für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ mit

$$\text{supp}\left(\varphi\right) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n,$$

dass

$$F_u(\varphi) = \left(F_U * f\right)(\varphi) = \int_{\substack{(x,t)\in\\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+}} \int_{s=0}^t \int_{y\in\mathbb{R}^n} U\left(x-y,t-s\right) f(y,s)dsdy\varphi(x,t)d\left(x,t\right)$$

und

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_t - \Delta\right)\left(F_U * f\right)(\varphi) \\
&= \int_{\substack{(x,t)\in\\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+}} \int_{s=0}^t \int_{y\in\mathbb{R}^n} U\left(x-y,t-s\right) f(y,s)dsdy \\
&\qquad \ldots \left(-\partial_t - \Delta_x\right)\varphi(x,t)d\left(x,t\right) \\
&= \int_{\substack{(x,t)\in\\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+}} \left(\partial_t - \Delta_x\right)\left(\int_{s=0}^t \int_{y\in\mathbb{R}^n} U\left(x-y,t-s\right) f(y,s)dsdy\right) \\
&\qquad \ldots \ \varphi(x,t)d\left(x,t\right) \\
&= \int_{\substack{(x,t)\in\\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+}} \left(\lim_{s\uparrow t} \int_{y\in\mathbb{R}^n} U\left(x-y,t-s\right) f(y,s)dy + \right. \\
&\qquad \left. \int_{s=0}^t \int_{y\in\mathbb{R}^n} \left(\partial_t - \Delta_x\right) U\left(x-y,t-s\right) f(y,s)dsdy\right) \\
&\qquad \ldots \ \varphi(x,t)d\left(x,t\right).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Weil (6.11) gilt und weil $(\partial_t - \Delta_x) U(x-y, t-s) = 0$ für $t - s > 0$, folgt

$$(6.12) = \int_{\substack{(x,t)\in \\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+}} f(x,t)\,\varphi(x,t) d(x,t) = F_f(\varphi).$$

Man kann diese Zeilen wahrscheinlich wie in (6.5) kürzer fassen. ■

Aufgabe 6.3 *Die Wellengleichung in einer Dimension ist*

$$\left(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\right) u(x,t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+.$$

Seien $u_0, v_0 \in C^2(\mathbb{R})$. Für das Anfangswertproblem bei

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ und } \partial_t u(x,0) = v_0(x)$$

hat man eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right) + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds.$$

NB: $\partial_t u(x,0) := (\partial_t u(x,t))_{t=0}$.

1. *Zeigen Sie, dass diese Formel eine Lösung gibt.*
2. *Für $u_0, v_0 \in C^0(\mathbb{R})$ gibt diese Formel eine distributionelle Lösung. Zeigen Sie, dass gilt*

$$\left(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\right) F_u(\varphi) = 0$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Auch gilt hier noch

$$\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = u_0(x).$$

Wie kann man die zweite Anfangsbedingung

$$\lim_{t\downarrow 0} \partial_t u(x,t) = v_0(x)$$

ersetzen?

3. *Finden Sie eine Lösung für*

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2\right) u(x,t) = f(x,t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x,0) = 0 = u_t(x,0) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Duhamel (1797-1872) hatte dazu eine Idee, die man mit Distributionen verstehen kann.

6.4 Fraktionale Ableitung

Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x) \text{ für } x > 0 \\ u^{(k)}(0) = 0 \text{ mit } 0 \le k < n, \end{cases}$$

findet man die Lösung durch n-mal Integrieren:

$$u(x) = \int_{s_1=0}^{x}\int_{s_2=0}^{s_1}\cdots\int_{s_n=0}^{s_{n-1}} f(s_n)ds_n \dots ds_2 ds_1.$$

Mit Abschnitt 6.2 kann man das nun auch anders finden:

$$F_u = F_U * f \text{ mit } U(x) = H(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{6.13}$$

Hier ist H die Heaviside-Funktion. Es gilt nämlich $U^{(n-2)}(x) = H(x)x$,

$$F_U^{(n-1)} = F_H \text{ und } F_U^{(n)} = \delta.$$

Das heißt, dass U die Lösung ist von

$$\begin{cases} U^{(n)}(x) = 0 \text{ für } x > 0, \\ U^{(n-1)}(0) = 1, \\ U^{(k)}(0) = 0 \text{ für } 0 \le k \le n-2. \end{cases}$$

Man kann (6.13) verallgemeinern, aber erst nachdem man die **Gamma-Funktion** in Betracht zieht:

Definition 6.4.1 *Man setzt für $x > 0$:*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{6.14}$$

Wir erinnern an einige Eigenschaften dieser Funktion

Lemma 6.4.2 *Sei Γ wie in (6.14).*

1. *Für $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$*

2. *Für $x > 0$ gilt $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.*

Bemerkung 6.4.3 *Die Formel in (6.14) ist wohl-definiert für $x \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(x) > 0$. Man kann sie sogar analytisch fortsetzen auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.*

Beweis. Für $x > 0$ folgt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -x t^{x-1} e^{-t} dt$$
$$= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Dann folgt iterativ, dass

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1)$$

Weil $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ folgt $\Gamma(n+1) = n!$. ■

Man definiere für $a > 0$ die Funktion

$$\chi_+^a(x) := H(x) \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}. \tag{6.15}$$

Sei $a > 1$, dann gilt für $x > 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi_+^{a+1}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^a}{\Gamma(a+1)} = \frac{a x^{a-1}}{a\Gamma(a)} = \chi_+^a(x) \tag{6.16}$$

und für $x \le 0$ gilt $\frac{\partial}{\partial x} \chi_+^{a+1}(x) = 0 = \chi_+^a(x)$. In 0 sollte man die rechte und die linke Ableitung mit Hilfe der Definition anschauen. Zusammen findet man für $a > 1$, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi_+^{a+1}(x) = \chi_+^a(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem gilt für $a, b > 0$, dass

$$\begin{aligned} \left(\chi_+^a * \chi_+^b\right)(x) &= \int_{y=0}^x \chi_+^a(x-y) \chi_+^b(y) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{y=0}^x (x-y)^{a-1} y^{b-1} dy \\ &= \frac{x^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{t=0}^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Die Funktion

$$B(a, b) := \int_{t=0}^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt$$

wird die **Eulersche Betafunktion** genannt.

Lemma 6.4.4 *Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt*
$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Beweis. Es gilt:
$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{b-1}e^{-s}ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{a-1}s^{b-1}e^{-t-s}dtds. \qquad (6.18)\end{aligned}$$

Wir substituieren $t = \theta\rho$ and $s = (1-\theta)\rho$.

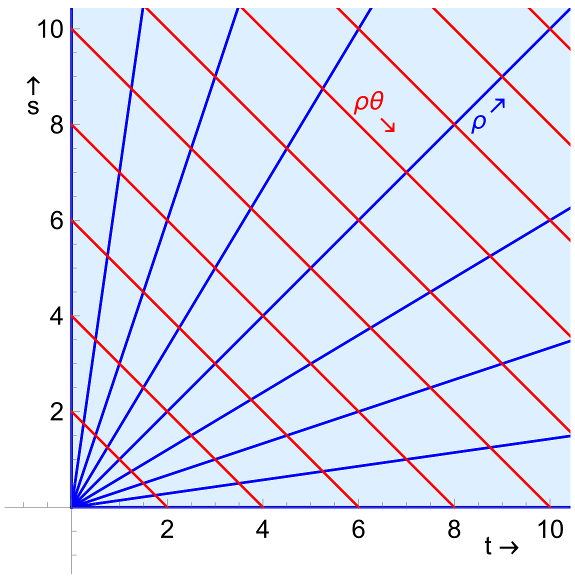


Abbildung 6.1: Die Substitution $t = \theta\rho$ und $s = (1-\theta)\rho$

Die Jacobi-Determinante ergibt
$$\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(\theta,\rho)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\rho & \theta \\ -\rho & 1-\theta\end{pmatrix}\right| = \rho$$

und man findet
$$\begin{aligned}(6.18) &= \int_{\rho=0}^\infty \int_{\theta=0}^1 (\theta\rho)^{a-1}\left((1-\theta)\rho\right)^{b-1}e^{-\rho}\rho d\theta d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^\infty \rho^{a+b-1}e^{-\rho}d\rho \int_{\theta=0}^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta \\ &= \Gamma(a+b)B(a,b).\end{aligned}$$

■

Mit der Identität in Lemma 6.4.4 folgt aus (6.17)
$$\left(\chi_+^a * \chi_+^b\right)(x) = \chi_+^{a+b}(x). \qquad (6.19)$$

Wir können eine reguläre Distribution definieren durch
$$F_{\chi_+^a}(\varphi) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}\varphi(x)dx. \qquad (6.20)$$

Lemma 6.4.5 *Sei $a > 0$ und sei $F_{\chi_+^a} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ wie in (6.20). Dann gilt:*

1. $F_{\chi_+^1}^{(n)} = \delta^{(n-1)}$ *für* $n \in \mathbb{N}^+$.
2. $F_{\chi_+^a}^{(n)} = F_{\chi_+^{a-n}}$ *für* $a > n$ *mit* $a \in \mathbb{R}^+$ *und* $n \in \mathbb{N}$.
3. $F_{\chi_+^a}^{(n)} * F_{\chi_+^b}^{(m)} = F_{\chi_+^{a+b}}^{(n+m)}$ *für* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *und* $n, m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir fangen an mit $F_{\chi_+^1} = F_H$ mit der Heaviside-Funktion H:
$$F_{\chi_+^1}(\varphi) = \int_0^\infty \frac{x^0}{\Gamma(1)}\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx.$$

Weil $F_H' = \delta$ folgt $F^{(n)}_{\chi^1_+} = \delta^{(n-1)}$ für $n \in \mathbb{N}^+$.

Die zweite Behauptung folgt aus (6.16). Wenn $a > n$, dann gilt
$$F^{(n)}_{\chi^a_+} = F^{(n-1)}_{\chi^{a-1}_+} = \cdots = F_{\chi^{a-n}_+}.$$

Für die dritte Behauptung verwendet man Lemma 5.4.5 und mit
$$F^{(n)}_{\chi^a_+} * F^{(m)}_{\chi^b_+} = \left(F_{\chi^a_+} * F_{\chi^b_+}\right)^{(n+m)}.$$
Weil $F_{\chi^b_+}$ eine reguläre Distribution ist, gilt
$$F_{\chi^a_+} * F_{\chi^b_+} = F_{\chi^a_+ * \chi^b_+}.$$
Mit (6.19) folgt
$$F_{\chi^a_+ * \chi^b_+} = F_{\chi^{a+b}_+}$$
und dann auch das gewünschte Ergebnis:
$$F^{(n)}_{\chi^a_+} * F^{(m)}_{\chi^b_+} = \left(F_{\chi^a_+ * \chi^b_+}\right)^{(n+m)} = F^{(n+m)}_{\chi^{a+b}_+}.$$
■

Proposition 6.4.6 *Sei $F_{\chi^a_+} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ wie in (6.20). Die Funktion*
$$a \mapsto F_{\chi^a_+} : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$
ist stetig im Sinne der schwachen Konvergenz der Distributionen auf $\mathbb{R}^+$.

Beweis. Das Letzte heißt, wenn $a_m \to a$, dann gilt für jedes $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, dass
$$F^{(n)}_{\chi^{a_m}_+}(\varphi) \to F^{(n)}_{\chi^a_+}(\varphi) \text{ in } \mathbb{R}.$$

Weil $F^{(n)}(\varphi) = (-1)^n F(\varphi^{(n)})$, reicht es, wenn wir zeigen, dass
$$F_{\chi^{a_m}_+}(\varphi) \to F_{\chi^a_+}(\varphi) \text{ in } \mathbb{R}$$
und es folgt, weil für $a_m \to a > 0$ gilt, dass
$$\int_0^\infty \left(\frac{x^{a_m-1}}{\Gamma(a_m)} - \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}\right) \varphi(x)dx \to 0.$$
■

Wir hatten schon, dass für $f \in C(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset [-a, \infty)$ die Distribution $F_{\chi^a_+} * f$ wohl-definiert ist und dass
$$F_{\chi^a_+} * f = F_{\chi^a_+ * f}$$
gilt. Diese Distribution kann man ableiten und dann Folgendes zeigen:

Korollar 6.4.7 *Sei $a > 0$ und sei $F_{\chi^a_+} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ wie in (6.20). Sei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $f \in C^m(\mathbb{R})$. Dann folgt:*

1. *Für $a > n$ gilt*
$$F^{(n)}_{\chi^a_+} * f = F^{(n)}_{\chi^a_+ * f} = F_{\chi^{a-n}_+ * f}.$$

2. *Für $a = n \in \mathbb{N}^+$ gilt*
$$F^{(n)}_{\chi^a_+} * f = F_f.$$

3. *Für $n > a > n - m$ gilt*
$$F^{(n)}_{\chi^a_+} * f = F^{(n)}_{\chi^a_+ * f} = F_{\chi^{a+m-n}_+ * f^{(m)}} \tag{6.21}$$
und wenn außerdem $a \in \mathbb{N}$, dann gilt
$$F^{(n)}_{\chi^a_+} * f = F_{f^{(n-a)}}.$$

In der letzten Zeile sieht man, wie man durch geschicktes Kombinieren von a und n die Ableitungen zurückfindet. Mit Hilfe von (6.21) findet man eine Möglichkeit **nicht-ganzzahlige Ableitungen** $f^{(\beta)}$ für $\beta \in (0,m)$ zu definieren:

Definition 6.4.8 *Für* $f \in C^m(\mathbb{R}^+)$ *mit* $\operatorname{supp}(f) \subset [a,\infty)$ *und* $\beta \in (0,m)$ *mit* $\beta \notin \mathbb{N}$ *nehme*

$$\begin{aligned} k &= [\beta] + 1 := \inf\{n \in \mathbb{N}; n > \beta\}, \\ a &= k - \beta \end{aligned}$$

und setze

$$F_{f^{(\beta)}} := F^{(k)}_{\chi_+^a} * f.$$

Diese Definition ist nicht die einzige Möglichkeit. Es gibt viele Alternativen, die auch echt andere Funktionen als nicht-ganzzahlige Ableitung geben. Es gibt leider keine Definition, die alle Eigenschaften der ganzzahligen Ableitungen übernimmt. Aus Lemma 6.4.5 und dem letzten Korollar folgen einige der gewünschten Eigenschaften:

- Die Abbildung $\beta \mapsto f^{(\beta)}$ ist stetig auf $[0,m]$ und für $\beta \in \{0,1,\ldots,m\}$ ist die Definition konsistent mit der klassischen Ableitung.
- Für $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ gilt
$$\lim_{\beta \to k} f^{(\beta)}(x) = f^{(k)}(x)$$
und für $k \in \{0,m\}$ auch die einseitigen Grenzwerte
$$\lim_{\beta \downarrow 0} f^{(\beta)}(x) = f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \uparrow m} f^{(\beta)}(x) = f^{(m)}(x).$$
- Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha + \beta \leq m$ gilt $\left(f^{(\beta)}\right)^{(\alpha)} = f^{(\alpha+\beta)}$.

Aufgabe 6.4 *Sei* $\gamma > 0$ *und sei* f_γ *definiert durch*

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^\gamma & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

1. *Berechnen Sie für* $0 < \beta < \gamma$ *die Ableitung* $f_\gamma^{(\beta)}(x)$.
2. *Berechnen Sie für* $0 < \beta < \gamma$ *die Ableitung* $f_\gamma^{(\beta)}(x-1)$.

Aufgabe 6.5 *Für* $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ *hat man*

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{(1)}(x) &= (f' \circ g)(x)\ g'(x), \\ (f \circ g)^{(2)}(x) &= (f'' \circ g)(x)\ (g'(x))^2 + (f' \circ g)(x)\ g''(x). \end{aligned}$$

Sie sollten eine Formel finden können für $(f \circ g)^{(3)}(x)$.
Können Sie eine ähnliche Formel finden für $(f \circ g)^{(3/2)}(x)$*?*

Kapitel 7

Distributionen Fourier-Transformation

7.1 Formale Definition

Wir sind schon dem Raum der (Lebesgue-)integrierbaren Funktionen $L^1(\mathbb{R}^n)$ begegnet. Für $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Norm $\|\cdot\|_1$ wohl-definiert durch

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda$$

und für lokal Riemann-integrierbare Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$ wird das

$$\|f\|_1 = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} |f(x)| \, dx.$$

Als uneigentliches Riemann-Integral schreibt man auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx := \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} |f(x)| \, dx.$$

Definition 7.1.1 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird die* ***Fourier-transformierte*** *von f definiert durch*

$$(\mathfrak{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \; x\cdot\xi} f(x) dx. \tag{7.1}$$

Bemerkung 7.1.2 *Oft schreibt man $\hat{f}$ statt $\mathfrak{F}f$. Oft wird die Fourier-Transformation ohne den Faktor 2π definiert.*

Auch $\mathfrak{F}f$ ist wieder eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Meistens ist sie jedoch komplexwertig und aus Symmetriegründen nimmt man dann auch schon $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ gilt auch für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\left(x \mapsto e^{-2\pi i \; x\cdot\xi} f(x)\right) \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

Dann ist das Integral in (7.1) wohl-definiert und man findet

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{F}f)(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \; x\cdot\xi} f(x) dx \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-2\pi i \; x\cdot\xi} f(x) \right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = \|f\|_1 . \end{aligned} \tag{7.2}$$

Wenn $\mathfrak{F}f$ eine Lebesgue-messbare Funktion ist, dann folgt $\mathfrak{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ mit $\|\mathfrak{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$. Man kann sogar mehr sagen:

Theorem 7.1.3 (Riemann-Lebesgue) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $\mathfrak{F}f$ definiert in (7.1). Dann gilt Folgendes:*

1. *$\mathfrak{F}f$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^n$;*
2. *$\mathfrak{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\|\mathfrak{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$;*
3. *$\lim_{|\xi|\to\infty} \mathfrak{F}f(\xi) = 0$.*

Bemerkung 7.1.4 *Die erste und auch die letzte Eigenschaft zeigen, dass $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht surjektiv ist.*

Beweis. Zu 1: Für die gleichmäßige Stetigkeit betrachten wir $|(\mathfrak{F}f)(\xi+\eta) - (\mathfrak{F}f)(\xi)|$. Weil

$$\begin{aligned}
&|(\mathfrak{F}f)(\xi+\eta) - (\mathfrak{F}f)(\xi)| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\ x\cdot\xi}\left(e^{-2\pi i\ x\cdot\eta} - 1\right) f(x)dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-2\pi i\ x\cdot\xi}\left(e^{-2\pi i\ x\cdot\eta} - 1\right) f(x)\right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(e^{-2\pi i\ x\cdot\eta} - 1\right) f(x)\right| dx \leq 2\|f\|_1
\end{aligned}$$

kann man das Majorisierte-Konvergenz-Theorem von Lebesgue verwenden und findet, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{\eta\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(e^{-2\pi i\ x\cdot\eta} - 1\right) f(x)\right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\eta\to 0}\left|\left(e^{-2\pi i\ x\cdot\eta} - 1\right) f(x)\right| dx = 0.
\end{aligned}$$

Weil die letzte Abschätzung nicht von ξ abhängt, ist $\xi \mapsto \mathfrak{F}f(\xi)$ sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Zu 2: Stetige Funktionen sind Lebesgue-messbar und dann folgt auch die Abschätzung $\|\mathfrak{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$ aus (7.2).

Zu 3: Das ist die Behauptung, die etwas mehr Arbeit fragt. Wir müssen zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert mit $|\xi| > R_\varepsilon$ impliziert $|\mathfrak{F}f(\xi)| < \varepsilon$. Weil

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|x|>R} |f|\, d\lambda = 0,$$

gibt für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $R_{1,\varepsilon} > 0$ derart, dass für $R \geq R_{1,\varepsilon}$ gilt

$$\left\|f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right\|_1 \leq \|f\|_1 \leq \left\|f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right\|_1 + \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Hier ist $\mathbf{1}_{B_R(0)}$ die Indikatorfunktion zu $B_R(0)$. Mit dem Friedrichs'schen Glätter $\{\varphi_\delta\}_{\delta\in(0,1)}$ betrachten wir

$$f_\delta(x) := \left(\varphi_\delta * f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right)(x). \tag{7.3}$$

Es folgt, dass $f_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\|f_\delta\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(y)\left(f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right)(x-y)dy\right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(y)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right)(x-y)\right| dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(y)\left\|f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right\|_1 dy = \left\|f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right\|_1 \leq \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Was wir nicht zeigen werden, ist, dass

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\left\|f_\delta - f\mathbf{1}_{B_R(0)}\right\|_1 = 0.$$

Wir brauchen jedoch das Ergebnis, dass man $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$-Norm approximieren kann mit $f_\delta \in C_0(\mathbb{R}^n)$ für $\delta \downarrow 0$. Sei $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $\delta \in (0, \delta_0)$ gilt, dass

$$\left\| f_\delta - f \mathbf{1}_{B_R(0)} \right\|_1 < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

So eine Funktion f_δ ist stetig und hat einen kompakten Träger. Dann ist f_δ sogar gleichmäßig stetig.

Wir nehmen nun an, dass $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$. Sei $\mathfrak{F}f$ wie in (7.1). Weil $e^{-\pi i} = -1$ findet man, dass auch gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}f)(\xi) &= -\int_{B_R(0)} \exp\left(-2\pi i \left(x \cdot \xi + \frac{1}{2}\right)\right) f(x)dx \\
&= -\int_{B_R(0)} \exp\left(-2\pi i \left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) \cdot \xi\right) f(x)dx \\
&= -\int_{B_R(0)} \exp(-2\pi i\, x \cdot \xi) f\left(x - \tfrac{\xi}{2|\xi|^2}\right)dx.
\end{aligned}$$

Kombinieren wir die beiden Formeln für $(\mathfrak{F}f)(\xi)$ halbe-halbe, so folgt

$$(\mathfrak{F}f)(\xi) = \int_{B_R(0)} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi} \left(f(x) - f\left(x - \tfrac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right) dx. \tag{7.4}$$

Weil f_δ auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig ist, gibt es für jedes $\rho > 0$ eine Zahl $M > 1$ derart, dass wenn $|\xi| > M$, so folgt für alle $x \in B_M(0)$:

$$\left| f_\delta(x) - f_\delta\left(x - \tfrac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right| < \rho.$$

Mit (7.4) finden wir, dass für $|\xi| > \max(R, M)$ gilt:

$$|(\mathfrak{F}f_\delta)(\xi)| \le \sigma_n (R+1)^n \rho. \tag{7.5}$$

Die Abschätzung in (7.5) impliziert, dass die letzte Behauptung des Theorems gilt, wenn wir $\rho > 0$ so wählen, dass $\sigma_n (R+1)^n \rho < \frac{1}{3}\varepsilon$. ∎

Weil die Fourier-Transformation als Integral definiert ist, findet man sofort, dass

$$\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{7.6}$$

linear ist. Linear und beschränkt, die zweite Eigenschaft des letzten Theorems, bedeutet dann, dass $\mathfrak{F}$ als Abbildung in (7.6) auch stetig ist.

Eine weitere Eigenschaft ist zum Beispiel:

- Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g(x) := \overline{f(-x)}$ gilt
$$(\mathfrak{F}g)(\xi) = \overline{(\mathfrak{F}f)(\xi)}. \tag{7.7}$$

Man findet, dass auch $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \overline{f(-x)}dx \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(-x)dx} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx} = \overline{(\mathfrak{F}f)(\xi)}.
\end{aligned}$$

Auch kann man die folgenden Eigenschaften zeigen für $y \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$:

- Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g(x) := f(x-y)$ gilt
$$(\mathfrak{F}g)(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi}(\mathfrak{F}f)(\xi). \tag{7.8}$$

- Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g(x) := e^{2\pi i x\cdot y} f(x)$ gilt

$$(\mathfrak{F}g)(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi - y). \tag{7.9}$$

- Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g(x) := f(rx)$ gilt

$$(\mathfrak{F}g)(\xi) = r^{-n} (\mathfrak{F}f)(r^{-1}\xi). \tag{7.10}$$

Aufgabe 7.1 *Zeigen Sie diese letzten 3 Behauptungen.*

Aufgabe 7.2 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit reellen Koeffizienten. Definiere*

$$g(x) := f(Ax).$$

Finden Sie eine Formel, die $(\mathfrak{F}g)(\xi)$ beschreibt mit der Fourier-Transformation von f.

Lemma 7.1.5 *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$(\mathfrak{F}(f * g))(\xi) = \mathfrak{F}f(\xi)\ \mathfrak{F}g(\xi).$$

Beweis. Das Produkt von f und g ist im Allgemeinen nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ein einfaches Gegenbeispiel auf $\mathbb{R}$ ist $f(x) = g(x) = \sqrt{|x|}$. Das Faltungsprodukt ist jedoch schon in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Weil $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sind f und g Lebesgue-messbar und

$$\int_{|x|<M} \left| \int_{|y|<N} f(x-y) g(y) dy \right| dx$$

ist wohl-definiert. Es gilt sogar die folgende, gleichmäßige Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|<M} \left| \int_{|y|<N} f(x-y) g(y) dy \right| dx \\
&\le \int_{|y|<N} \int_{|x|<M} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx dy \\
&\le \int_{|y|<N} \int_{|z|<M+N} |f(z)|\, |g(y)|\, dz dy \\
&\le \int_{|y|<N} \left(\int_{|z|<M+N} |f(z)|\, dz \right) |g(y)|\, dy \\
&\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Lässt man N und M nach unendlich gehen, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right| dx \\
&\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

und dies zeigt, dass $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die eigentliche Behauptung folgt mit Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}(f * g))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi} g(x-y) dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\ \mathfrak{F}g(\xi)\ dy = \mathfrak{F}f(\xi)\ \mathfrak{F}g(\xi).
\end{aligned}$$

■

Beispiel 7.1 Sei $a > 0$ und betrachte die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{[-a,a]}$. Wir finden

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{F}\mathbf{1}_{[-a,a]}\right)(\xi) &= \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x\xi} dx \\ &= \frac{e^{-2\pi i a\xi} - e^{2\pi i a\xi}}{-2\pi i\xi} = \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}.\end{aligned}$$

Übrigens kann man zeigen, dass obwohl die dritte Eigenschaft in Theorem 7.1.3 erfüllt ist, $\mathfrak{F}\mathbf{1}_{[-a,a]}$ nicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegt.

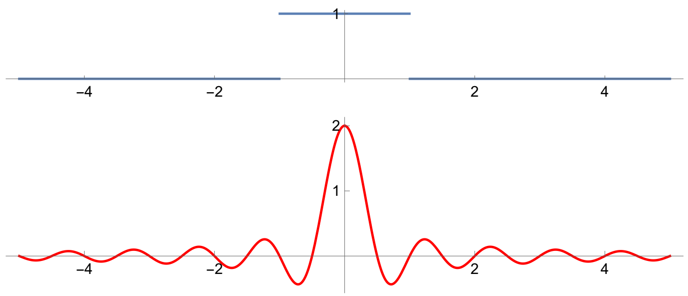


Abbildung 7.1: Skizzen zu $x \mapsto \mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$ und $\xi \mapsto \left(\mathfrak{F}\mathbf{1}_{[-a,a]}\right)(\xi)$

Beispiel 7.2 Sei $f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}(f * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x-y)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)dy \\ &= \int_{-1}^{1} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x-y)dy = \int_{-1}^{1} \mathbf{1}_{[-1,1]}(y-x)dy \\ &= \begin{cases} \int_{x-1}^{1} 1dx = 2-x & \text{für } 0 \le x \le 2, \\ \int_{-1}^{1+x} 1dx = 2+x & \text{für } -2 < x < 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \max(0, 2-|x|).\end{aligned}$$

Man kann $(\mathfrak{F}(f * f))(\xi)$ direkt ausrechnen, jedoch auch Lemma 7.1.5 verwenden und findet

$$\left(\mathfrak{F}\left(\mathbf{1}_{[-1,1]} * \mathbf{1}_{[-1,1]}\right)\right)(\xi) = \left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2.$$

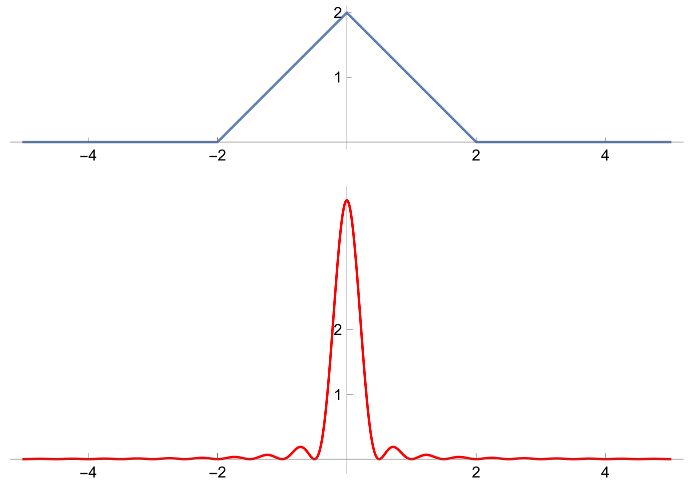


Abbildung 7.2: Skizzen zu $x \mapsto \left(\mathbf{1}_{[-a,a]} * \mathbf{1}_{[-a,a]}\right)(x)$ und $\xi \mapsto \left(\mathfrak{F}\left(\mathbf{1}_{[-a,a]} * \mathbf{1}_{[-a,a]}\right)\right)(\xi)$

Aufgabe 7.3 *1. Sei* $g = \mathbf{1}_{[-2,2]} * \mathbf{1}_{[-1,1]}$. *Zeigen Sie, dass*

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \textit{für } |x| \le 1, \\ 3-|x| & \textit{für } 1 \le |x| \le 3, \\ 0 & \textit{für } |x| \ge 3. \end{cases}$$

2. Berechnen Sie $(\mathfrak{F}g)(\xi)$.

Beispiel 7.3 Sei $a > 0$. Durch Substitution sieht man, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-a\,(x-z)^2\right) dx \tag{7.12}$$

nicht von $z \in \mathbb{R}$ abhängt.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-ax^2\right) dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-y^2\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) dx \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-y^2\right) dy} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{r=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \exp\left(-r^2\right) r\,dr\,d\phi} = \sqrt{\pi/a}.
\end{aligned}$$

Wenn Sie mit komplexen Funktionen umgehen können, dann wissen Sie, dass der Residuensatz von Cauchy zeigt, dass das Integral in (7.12) sogar für alle $z \in \mathbb{C}$ die gleiche Zahl liefert. Dies gilt, weil $w \mapsto \exp\left(-aw^2\right)$ analytisch ist auf $\mathbb{C}$ und $\lim_{|x|\to\infty} \exp\left(-a\,(x-z)^2\right) = 0$ für $a > 0$. Wenn Sie dieses Ergebnis verwenden, dann können Sie bei der Funktion $f(x) = \exp\left(-ax^2\right)$ die Fourier-Transformierte berechnen:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \\
&= \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\xi^2\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-a\,(x + i\pi\xi/a)^2\right) dx \\
&= \sqrt{\pi/a}\, \exp\left(-\frac{\pi^2}{a}\xi^2\right).
\end{aligned}$$

7.2 Für schnell-fallende Funktionen

Die schnell-fallenden Funktionen sind derart, dass φ und auch die Funktionen

$$x \mapsto x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen. Dieses Ergebnis folgt aus der folgenden Abschätzung.

$$\left|x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)\right| \le \frac{\left\|\left(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^n x^\alpha \varphi^{(\beta)}\right\|_\infty}{\left(1 + |x|^2\right)^n}. \tag{7.13}$$

Die Norm im Zähler ist endlich und

$$x \mapsto \left(1 + |x|^2\right)^{-n}$$

ist integrierbar in $\mathbb{R}^n$. Denn sei σ_n der Flächeninhalt der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, so folgt mit spherischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + |x|^2\right)^n} dx &= \sigma_n \int_{r=0}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{\left(1 + r^2\right)^n} dr \\
&\le \sigma_n \left(1 + \int_1^{\infty} r^{-n-1} dr\right) \le 2\sigma_n.
\end{aligned}$$

Man hat das folgende Ergebnis:

Lemma 7.2.1 *Sei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\mathfrak{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt außerdem, dass*

$$(-2\pi i)^{|\alpha|}\, \mathfrak{F}\left(x^\alpha \varphi^{(\beta)}\right) = (2\pi i)^{|\beta|}\, \xi^\beta \left(\mathfrak{F}\varphi\right)^{(\alpha)}. \tag{7.14}$$

Beweis. Mit der Folgerung vor dem Lemma sind die folgenden Integrale wohl-definiert. Man findet mit der letzten Eigenschaft von Theorem 7.1.3, dass man partiell integrieren kann.

Dann folgt

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}\varphi^{e_j})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right)\varphi(x)dx\\ &= 2\pi i\xi_j\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)dx = 2\pi i\xi_j\ (\mathfrak{F}\varphi)(\xi)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}x_j\varphi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}x_i\varphi(x)dx\\ &= \frac{1}{-2\pi i}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)dx\\ &= \frac{1}{-2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)dx = \frac{1}{-2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\mathfrak{F}\varphi)(\xi).\end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung folgt (7.14).

Weil $x \mapsto x^\alpha\varphi^{(\beta)}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt, folgt, dass $\xi \mapsto \xi^\beta(\mathfrak{F}\varphi)^{(\alpha)}$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt und dies gilt für alle $a, \beta \in \mathbb{N}^n$. Dann folgt, dass $\mathfrak{F}\varphi$ beliebig oft differenzierbar ist und außerdem, wie in (7.13), dass

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\xi^{\tilde\beta}(\mathfrak{F}\varphi)^{(\tilde\alpha)} = 0.$$

Das heißt $\mathfrak{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Aufgabe 7.4 *Sei* $f(x) = \exp\left(-\pi|x|^2\right)$ *mit* $x \in \mathbb{R}^n$.

1. *Zeigen Sie:*

$$(\mathfrak{F}f)(x) = f(x)\ \text{für}\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.15}$$

2. *Es gibt andere, unabhängige Funktionen mit der gleichen Eigenschaft, zum Beispiel* $f_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, *definiert durch*

$$f_1(x) = \left(1 - 3x^2 + 2\pi x^4\right)\exp\left(-\pi x^2\right) \tag{7.16}$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{F}f_1(x) = f_1(x)$.

Wir hatten schon, dass $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig ist. Als Nächstes zeigen wir, dass

$$\mathfrak{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \tag{7.17}$$

stetig ist.

Korollar 7.2.2 *Seien* $\varphi_m, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Wenn* $\varphi_m \to \varphi$ *in* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *dann folgt* $\mathfrak{F}\varphi_m \to \mathfrak{F}\varphi$ *in* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Linearität von $\mathfrak{F}$ sollte klar sein. Für die Stetigkeit reicht es dann, $\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten. Wenn $\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $m \to \infty$, dann bedeutet das, dass für alle $\tilde\alpha, \tilde\beta \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$\left\|x^{\tilde\alpha}\varphi_m^{(\tilde\beta)}\right\|_\infty \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Mit (7.13) folgt

$$\left\|x^\alpha\varphi_m^{(\beta)}\right\|_1 \le M_\alpha\left\|\left(1+|x|^2\right)^n x^\alpha\varphi_m^{(\beta)}\right\|_\infty,$$

und dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ auch

$$\left\|x^\alpha\varphi_m^{(\beta)}\right\|_1 \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Weil $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, folgt aus Lemma 7.2.1, dass

$$\left\|\xi^\beta(\mathfrak{F}\varphi_m)^{(\alpha)}\right\|_\infty \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Das Letzte ist genau $\mathfrak{F}\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Die Eigenschaft aus Lemma 7.2.1 lässt vermuten, dass es auch eine Inverse für die Fourier-Transformation als Abbildung in (7.17) geben könnte. Um dies zu zeigen, schauen wir die folgende Abbildung an:

$$\mathfrak{I} := S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{7.18}$$

Hier ist S der Spiegelungsoperator aus Definition 5.2.1. Als Zusammenstellung von stetigen, linearen Abbildungen ist auch $\mathfrak{I}$ stetig und linear.

Lemma 7.2.3 *Die Abbildung $\mathfrak{I}$ aus (7.18) hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $\mathfrak{I}(x_i\varphi) = x_i(\mathfrak{I}\varphi)$ *für alle* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *und* $i \in \{1, \ldots, n\}$;
2. $\mathfrak{I}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathfrak{I}\varphi)$ *für alle* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *und* $i \in \{1, \ldots, n\}$;
3. $\mathfrak{I}(\varphi(\cdot + y)) = (\mathfrak{I}\varphi)(\cdot + y)$ *für alle* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *und* $y \in \mathbb{R}^n$;

Beweis. Das wird eine Übung im Klammersetzen und Variablenwählen. Wir fangen mit x an, schreiben ξ in $\mathfrak{F}\varphi$ und wieder x in $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi$. Mit Lemma 7.2.1 folgt dann

$$\begin{aligned}
&(S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(x_i\varphi) = \frac{1}{-2\pi i}(S \circ \mathfrak{F})\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathfrak{F}\varphi)\right) \\
&= \frac{2\pi i}{-2\pi i} S \circ x_i(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi) = -S \circ x_i(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi) \\
&= x_i(S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(\varphi)
\end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned}
&(S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) = 2\pi i\ (S \circ \mathfrak{F})(\xi_i(\mathfrak{F}\varphi)) \\
&= \frac{2\pi i}{-2\pi i} S \circ \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi) = -S \circ \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(\varphi).
\end{aligned}$$

Die dritte Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{F}(\varphi(\cdot + y))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x+y)dx \\
&= e^{2\pi i y\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x+y)\cdot\xi}\varphi(x+y)dx \\
&= e^{2\pi i y\cdot\xi}\mathfrak{F}(\varphi)(\xi),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left(e^{2\pi i y\cdot x}\varphi\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(y-\xi)\cdot x}\varphi(x)dx \\
&= (\mathfrak{F}\varphi)(\xi - y).
\end{aligned}$$

Kombinieren liefert

$$(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(\varphi(\cdot + y)) = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi)(\xi - y)$$

und wir finden so:

$$\begin{aligned}
&(S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(\varphi(\cdot + y))(\xi) = S((\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi)(\xi - y)) \\
&= (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi)(-\xi - y) = (S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F})(\xi + y).
\end{aligned}$$

■

Weil die Abbildung stetig und linear ist, folgt, dass $F_{\mathfrak{J}}$, definiert durch

$$F_{\mathfrak{J}}(\varphi) := \delta_0(\mathfrak{J}\varphi), \tag{7.19}$$

eine Distribution ist in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 7.2.4 *Sei $F_{\mathfrak{J}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wie in (7.19). Dann gilt*

$$F_{\mathfrak{J}} = \delta_0. \tag{7.20}$$

Beweis. Aus dem ersten Ergebnis von Lemma 7.2.3 und der Definition von $F_{\mathfrak{J}}$ in (7.19) folgt, dass

$$x_k F_{\mathfrak{J}}(\varphi) = F_{\mathfrak{J}}(x_k\varphi) = \delta_0(\mathfrak{J}(x_k\varphi)) = \delta_0(x_k\mathfrak{J}\varphi) = 0 \tag{7.21}$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$. Weil $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und mit Lemma 5.1.2 folgt $\operatorname{supp}(F_{\mathfrak{J}}) = \{0\}$.

Aus Proposition 3.5.2 folgt dann, dass es $m \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$F_{\mathfrak{J}} = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}.$$

Sei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und sei T_φ das Taylorpolynom T_φ von Ordnung m in $x_0 = 0$. Für ψ_1 wie in (3.13) folgt $\psi_1 T_\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$F_{\mathfrak{J}}(\varphi - \psi_1 T_\varphi) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}(\varphi - \psi_1 T_\varphi) = 0$$

und mit (7.21) folgt

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{J}}(\psi_1 T_\varphi) &= F_{\mathfrak{J}}\left(\psi_1 \sum\nolimits_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} x^\alpha \varphi^{(\alpha)}(0)\right) \\ &= \sum\nolimits_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} F_{\mathfrak{J}}\left(\psi_1 x^\alpha \varphi^{(\alpha)}(0)\right) \\ &= F_{\mathfrak{J}}(\psi_1 \varphi(0)) = c_0\varphi(0). \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$F_{\mathfrak{J}}(\varphi) = c_0\varphi(0).$$

Wir müssen noch zeigen, dass $c_0 = 1$ und betrachten dazu

$$\varphi^*(x) = \exp\left(-\pi\,|x|^2\right)$$

aus (7.15). Man findet

$$\begin{aligned} (\mathfrak{J}\varphi^*)(x) &= (S \circ \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}\varphi^*)(x) \\ &= \varphi^*(-x) = \varphi^*(x) \end{aligned}$$

und weil $\varphi^*(0) = 1$, folgt

$$c_0 = c_0\varphi^*(0) = F_{\mathfrak{J}}(\varphi^*) = \delta(\mathfrak{J}\varphi^*) = \delta(\varphi^*) = 1.$$

Damit ist die Behauptung in (7.20) bewiesen. ∎

Das Ergebnis in (7.20) kann man auch schreiben als: Für jedes $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt, w

$$\delta_0((S \circ \mathfrak{F})(\mathfrak{F}(\varphi(\cdot)))) = \varphi(0).$$

Verwendet man auch noch das dritte Ergebnis in Lemma 7.2.3, so findet man

$$\delta_0((S \circ \mathfrak{F})(\mathfrak{F}(\varphi(\cdot + y)))) = \varphi(y). \tag{7.22}$$

Diese Gleichung gibt eine Möglichkeit für die Inverse von $\mathfrak{F}$ in (7.17).

Das funktioniert wie folgt: Wenn man $\mathfrak{F}\varphi$ kennt, dann kennt man auch

$$\mathfrak{F}(\varphi(\cdot + y))(\xi) = e^{2\pi i y\cdot\xi}(\mathfrak{F}\varphi)(\xi) \tag{7.23}$$

und die Inverse $\mathfrak{F}^{-1} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ wird definiert, indem man (7.22) und (7.23) kombiniert und dann $\mathfrak{F}^{-1}\psi = \varphi$ schreibt

$$\left(\mathfrak{F}^{-1}\psi\right)(y) = \delta_0\left((S \circ \mathfrak{F})\left(e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi\right)\right).$$

Es gilt

$$\mathfrak{F}\left(e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.\xi} e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi,$$
$$(S \circ \mathfrak{F})\left(e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x.\xi} e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi$$

und

$$\delta_0\left((S \circ \mathfrak{F})\left(e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi.$$

Wir haben Folgendes gefunden:

Korollar 7.2.5 *Die Inverse von*

$$\mathfrak{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

existiert und wird gegeben durch

$$\left(\mathfrak{F}^{-1}\psi\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i y\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi.$$

Bemerkung 7.2.6 *Es gilt also $\mathfrak{F}^{-1} = \overline{\mathfrak{F}}$. Diese Inverse ist definiert auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir haben schon gesehen, dass $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ keine Inverse hat. Das beste Ergebnis, das man momentan erwarten kann, ist, wenn $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathfrak{F}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\varphi = \varphi$. Der Raum $L^2(\mathbb{R})$ ist etwas zwischen $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und man kann zeigen, dass $\mathfrak{F}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ eine Bijektion ist. Dazu braucht es einen eigenen Beweis.*

Bemerkung 7.2.7 *Es gilt*

$$\mathfrak{F}^{-1}\psi = \overline{\mathfrak{F}\overline{\psi}} \text{ für } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$$

und daher hat $\mathfrak{F}^{-1}$ ähnliche Eigenschaften wie $\mathfrak{F}$.

7.3 Skalarprodukt

In $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $(x, y) \to x \cdot y$ ein Skalarprodukt oder inneres Produkt. Skalarprodukte kann man manchmal auch sinnvoll definieren auf reellen Vektorräumen und sogar auf komplexen Vektorräumen.

Definition 7.3.1 *Sei V ein Vektorraum. Dann ist*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

*ein **Skalarprodukt**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

1. *Sesquilinear: für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt*
$$\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\mu}\langle u, w\rangle,$$
$$\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\langle u, w\rangle.$$

2. *Hermitesch: für alle $u, v \in V$ gilt*
$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}.$$

3. *Positiv-Definit: für alle $u \in V$ gilt*
$$\langle u, u\rangle \in [0, \infty),$$
$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Für $V = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$, definiert durch

$$\langle\varphi,\psi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx \tag{7.24}$$

ein Skalarprodukt. Weil für jedes $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein $M_\varphi \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$|\varphi(x)| \le M_\varphi \left(1+|x|\right)^{-n} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

ist $x \mapsto \varphi(x)\overline{\psi(x)}$ integrierbar über $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}&\int_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\varphi(x)\overline{\psi(x)}\right| dx\\ &\le M_\varphi M_\psi \int_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1+|x|\right)^{-2n} dx\\ &\le C\int_{r=0}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{2n}} < \infty.\end{aligned}$$

Theorem 7.3.2 *Sei $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{F}\varphi(x)\ \psi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ \mathfrak{F}\psi(x)\ dx \tag{7.25}$$

und

$$\langle\mathfrak{F}\varphi,\mathfrak{F}\psi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle\,. \tag{7.26}$$

Bemerkung 7.3.3 *Setzt man in (7.26) $\varphi=\psi$ ein, dann folgt*

$$\|\mathfrak{F}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{7.27}$$

*Die L^2-**Norm** ist definiert auf (Lebesgue-messbare) Funktionen $\varphi : A \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ durch*

$$\|\varphi\|_{L^2(A)} := \left(\int_A |\varphi(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Man sagt $\varphi \in L^2(A)$, wenn $\|\varphi\|_{L^2(A)} < \infty$.
Plancherel hat bewiesen, dass für jede Funktion $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass $\mathfrak{F}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und dass außerdem (7.27) gilt.

Beweis. Ausschreiben gibt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathfrak{F}\varphi\right)(x)\ \psi(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\ \varphi(\xi)d\xi\ \psi(x)dx\\ =\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\ \psi(x)dx\ \varphi(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\ \left(\mathfrak{F}\psi\right)(\xi)\ d\xi.\end{aligned}$$

Das zweite Ergebnis folgt aus

$$\begin{aligned}\overline{\left(\mathfrak{F}\psi\right)(x)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\overline{\psi(\xi)}d\xi = \left(\mathfrak{F}^{-1}\overline{\psi}\right)(x)\end{aligned}$$

und $\psi(x)$ in (7.25) ersetzen durch $\overline{\left(\mathfrak{F}\psi\right)(x)}$. ■

Aufgabe 7.5 *Zeigen Sie, dass (7.25), (7.26) und (7.27) äquivalent sind. Damit ist gemeint, dass wenn eine dieser Gleichungen für alle $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ oder für alle $\varphi,\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt, auch beide anderen für alle solchen Funktionen gelten. Hinweis, betrachte*

$$\|\varphi-\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \text{ und } \|\varphi+\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Aufgabe 7.6 *1. Zeigen Sie, dass*

$$L^2(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n) \text{ und } L^1(\mathbb{R}^n) \not\subset L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

2. Zeigen Sie auch, dass $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 7.7 *1. Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ als Mengen. Die letzte Inklusion soll aufgefasst werden als:*
für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $F_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Zeigen Sie, dass die Inklusionen auch als topologischer Raum gelten. Da heißt $A \subset B$, dass eine konvergente Folge in A auch konvergiert in B.

Lemma 7.3.4 *Sei $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die Fourier-Transformierte $\mathfrak{F}F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist wohl-definiert für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$(\mathfrak{F}F)(\varphi) = F(\mathfrak{F}\varphi).$$

Beweis. Aus Lemma 7.2.1 folgt $\mathfrak{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Linearität von $\mathfrak{F}F$ ist wohl deutlich. Wenn $\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $m \to \infty$, dann folgt $\mathfrak{F}\varphi_m \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $m \to \infty$. Dann folgt die Stetigkeit von $\mathfrak{F}F$ aus der von F. ■

Aufgabe 7.8 *Zeigen Sie, für $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathfrak{F}\delta = F_1$.*

Beispiel 7.4 Für $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\mathfrak{F}\delta')(\varphi) = 2\pi i \int_{\mathbb{R}} \xi\varphi(\xi) d\xi.$$

7.4 Anwendung auf stationäre Differentialgleichungen

Betrachtet man den Laplace-Operator in $\mathbb{R}^n$,

$$\Delta u(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 u(x),$$

und die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = f(x), \tag{7.28}$$

dann könnte man die Fourier-Transformation verwenden, um Folgendes zu finden:

$$(2\pi)^2 \xi \cdot \xi \, \mathfrak{F}u(\xi) = \mathfrak{F}f(\xi).$$

Man hätte dann eine Lösung u gefunden durch

$$u = \frac{1}{4\pi^2} \mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{|\xi|^2} \mathfrak{F}f.$$

Für den Fall, dass es eine Funktion g_n derart gibt, dass

$$F_{g_n} = \frac{1}{4\pi^2} \mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{|\xi|^2} \mathfrak{F}\delta_0,$$

hat man sogar einen Lösungsoperator für (7.28) gefunden:

$$u(x) = (g_n * f)(x).$$

Versuchen wir die Details mal anzuschauen.

Ansatz 1 Damit $\mathfrak{F}f$ wohl-definiert ist, brauchen wir $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Es folgt, dass $\mathfrak{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, und sogar $\mathfrak{F}f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\mathfrak{F}f(\xi) \to 0$. für $|\xi| \to \infty$. Leider liegt $\xi \mapsto |\xi|^{-2}\mathfrak{F}f(\xi)$ im Allgemeinen nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und sogar nicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Denn für

$$\mathfrak{F}f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \neq 0$$

gilt $\left\| |\xi|^{-2}\mathfrak{F}f(\xi)\right\|_{L^1(B_1(0))} < \infty$ nur wenn $n \geq 3$.
Man findet $\left\| |\xi|^{-2}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus B_1(0))} < \infty$ nur wenn $n = 1$ und es würde davon abhängen, wie schnell $\mathfrak{F}f(\xi) \to 0$ geht für $|\xi| \to \infty$, ob $\left\| |\xi|^{-2}\mathfrak{F}f(\xi)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus B_1(0))}$ beschränkt wäre.

Ansatz 2 Man könnte $\mathfrak{F}f$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ betrachten. Dann hätte man $\mathfrak{F}f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Auch hier verursacht $|\xi|^{-2}$ ein Problem. Für $\mathfrak{F}f(0) \neq 0$ ist $|\xi|^{-2}\mathfrak{F}f(\xi)$ unbeschränkt.

Ansatz 3 Es gilt $\mathfrak{F}\delta_0 = F_1$, denn

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}\delta_0)(\varphi) &= (\mathfrak{F}\varphi)(0)\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)dx\right)_{|\xi=0} = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = F_1(\varphi).\end{aligned}$$

Weiter ist $|\xi|^{-2}F_1$ wohldefiniert für $n \geq 3$ durch

$$\left(|\xi|^{-2}F_1\right)(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}\psi(\xi)d\xi,$$

denn in spherischen Koordinaten folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}\psi(\xi)d\xi = \int_{r=0}^{\infty} r^{n-3}\left(\int_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}\psi(r\omega)d\omega\right)dr$$

und

$$\left|\int_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}\psi(r\omega)d\omega\right| \leq \int_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}}|\psi(r\omega)|\,d\omega \leq \frac{M_\psi}{1+r^n}.$$

Dieser Ansatz, also erst die spezielle Lösung bei der δ_0-Distribution zu berechnen, verspricht mehr als die ersten beiden. Wenn erfolgreich und das Ergebnis ist eine Reguläre Distribution, dann folgt die Fundamentallösung, die wir schon in (3.11) sahen.

Wir werden den letzten Ansatz also fortsetzen und finden, dass

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^{-2}F_1\right)\right)(\varphi) &= \left(|\xi|^{-2}F_1\right)\left(\mathfrak{F}^{-1}\varphi\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)dxd\xi. \end{aligned}\tag{7.29}$$

Leider ist dies kein L^1-Integral für nicht-triviale φ, denn

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left||\xi|^{-2}e^{2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\right|dxd\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}|\varphi(x)|\,dxd\xi = \infty\end{aligned}$$

und Fubini-Tonelli trifft nicht zu. Formal muss man (7.29) als uneigentliches Integral für $|\xi| \to \infty$ betrachten. Aus Lemma 7.2.1 folgt, dass $\mathfrak{F}^{-1}\varphi$ schnell fallend ist und wir haben daher, dass für jede offene Umgebung U von $\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)dxd\xi =\\ &\lim_{\rho\to\infty}\int_{\rho U}|\xi|^{-2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)dxd\xi =\\ &\lim_{\rho\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\rho U}|\xi|^{-2}e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi\right)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Durch eine Rotation als Substitution $\tilde{\xi} = \mathrm{R}_x \xi$ und zwar derart, dass die erste Koordinate von $\tilde{\xi}$ in der x-Richtung zeigt, folgt

$$\int_{\rho U} |\xi|^{-2} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \int_{\rho \mathrm{R}_x^{-1} U} |\xi|^{-2} e^{2\pi i |x| \xi_1} d\xi.$$

Wir nehmen als Umgebung den Zylinder

$$\mathrm{R}_x^{-1} U = [-1,1] \times \tilde{B}_1(0)$$

für $\tilde{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Mit $\xi = (\xi_1, \xi_*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ gilt

$$\int_{\rho \mathrm{R}_x^{-1} U} |\xi|^{-2} e^{2\pi i |x| \xi_1} d\xi = \int_{\tilde{B}_\rho(0)} \int_{[-\rho,\rho]} \frac{e^{2\pi i |x| \xi_1}}{\xi_1^2 + |\xi_*|^2} d\xi_1 d\xi_*.$$

Mit dem Cauchyschen Residuensatz (aus der Vorlesung Komplexen Funktionen) folgt für $|\xi_*| \neq 0$, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i |x| \xi_1}}{\xi_1^2 + |\xi_*|^2} d\xi_1 = \frac{\pi}{|\xi_*|} e^{-2\pi |x| |\xi_*|}. \tag{7.30}$$

Nun können wir zu Ende rechnen und bekommen

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho\to\infty} \int_{\tilde{B}_\rho(0)} \int_{[-\rho,\rho]} \frac{e^{2\pi i |x| \xi_1}}{\xi_1^2 + |\xi_*|^2} d\xi_1 d\xi_* \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\pi}{|\xi_*|} e^{-2\pi |x| |\xi_*|} d\xi_* \\
&\text{(mit spherischen Koordinaten in } \mathbb{R}^{n-1}) \\
&= \pi \sigma_{n-1} \int_{r=0}^{\infty} r^{n-3} e^{-2\pi |x| r} dr \\
&= \pi \sigma_{n-1} |x|^{2-n} \int_{r=0}^{\infty} r^{n-3} e^{-2\pi r} dr \\
&= C_n |x|^{2-n}.
\end{aligned}$$

So etwas hatten wir schon in Beispiel 3.2.

Dieser Ansatz funktioniert nicht nur für Δ, sondern auch für andere Differentialgleichungen. Das genaue Ergebnis werden wir nicht formulieren. Wir haben schon gesehen, dass das Benehmen des Symbols bei $\xi = 0$ eine Rolle spielt. Wenn das Symbol überall ungleich 0 ist, dann ist das Ergebnis leichter zu beweisen, aber dann verpasst man die meist interessanten Fälle.

Ansatz 7.4.1 *Hat man eine partielle Differentialgleichung*

$$\sum_{|\alpha|\le 2m} c_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x) = f(x) \tag{7.31}$$

auf $\mathbb{R}^n$ *mit* $c_\alpha \in \mathbb{C}$ *und ist das* ***Symbol***

$$\sum_{|\alpha|\le 2m} c_\alpha \xi^\alpha$$

ungleich 0 *außer eventuell für* $|\xi| = 0$, *dann kann man (7.31) für* $f = \delta_0$ *versuchen im distributionellen Sinne zu lösen. Wenn*

$$F_{fun} = \mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{\sum_{|\alpha|\le 2m} c_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha} F_1$$

diese Lösung ist, dann folgt für (7.31)

$$u = F_{fun} * f.$$

Bemerkung 7.4.2 *Wenn* F_{fun} *eine reguläre Distribution ist, also* $F_{fun} = F_{\mathsf{u}_{fun}}$, *dann nennt man den Ausdruck*

$$\mathsf{u}_{fun}(x) := \left(\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{\sum_{|\alpha|\le 2m} c_\alpha (2\pi i \cdot)^\alpha}\right)(x)$$

eine ***Fundamentallösung*** *für (7.31). Sie gibt die Lösung von (7.31), wenn $f = \delta_0$. Für allgemeinere f kann man schreiben $f = \delta_0 * f$ und folgt die Lösung von (7.31) durch*

$$u(x) = (F_{fun} * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathsf{u}_{fun}(x-y)\, f(y)dy.$$

Übrigens ist alles hier auf der Ebene der (regulären) Distributionen geschrieben und f sollte nicht als Testfunktion gesehen werden.

Bemerkung 7.4.3 *In konkreten Fällen werden fast immer, wie auch oben in (7.30), für einen expliziten Lösungoperator, Kurvenintegrale von meromorphen Funktionen in der komplexen Ebene benutzt. Solche Integrale sind wohl-definiert und werden oft berechnet mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes.*

Bemerkung 7.4.4 *Wenn für das Symbol $c_0 > 0$ existiert mit*

$$\sum_{|\alpha|\leq 2m} c_\alpha \xi^\alpha \geq c_0 |\xi|^{2m} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{7.32}$$

dann nennt man die zugehörige partielle Differentialgleichung elliptisch von Ordnung $2m$.

Aufgabe 7.9 *Versuchen Sie in $\mathbb{R}^2$ die Gleichung*

$$(-\Delta + 1)\, u = f$$

zu lösen.

Aufgabe 7.10 *Versuchen Sie in $\mathbb{R}^2$ die Gleichung*

$$(\Delta + 1)\, u = f$$

zu lösen.

Aufgabe 7.11 *Für eine partielle Differentialgleichung rein zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{|\alpha|=2} c_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x) = f(x),$$

die (7.32) erfüllt, gibt es eine invertierbare Matrix $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ derart, dass

$$\tilde{u}(Ax) = u(x) \text{ und } \tilde{f}(Ax) = f(x)$$

die Gleichung

$$-\Delta\tilde{u}(y) = \tilde{f}(y)$$

erfüllt. Wie findet man A?
Hinweis: es gibt eine symmetrische Matrix M derart, dass

$$\sum_{|\alpha|=2} c_\alpha \xi^\alpha = \xi \cdot M\xi.$$

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar und wegen (7.32) sind alle Eigenwerte positiv. Das bedeutet, es gibt eine Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen auf der Diagonale und $M = TDT^\intercal$. Es gibt dann auch es eine Diagonalmatrix $\sqrt{D}$ mit positiven Einträgen auf der Diagonale und

$$M = TDT^\intercal = T\sqrt{D}\sqrt{D}T^\intercal = (T\sqrt{D})(T\sqrt{D})^\intercal.$$

Aufgabe 7.12 *Ein senkrecht geflochtenes Raster von Stäben, die nicht verschweißt sind, und auf dem man ein Gewicht platziert, wird durch die folgende Differentialgleichung modelliert:*

$$u_{xxxx} + u_{yyyy} = f. \tag{7.33}$$

Hier ist f die Gewichtsdichte und u die Auslenkung.

1. *Welches Symbol hat diese Differentialgleichung?*
2. *Kann man (7.33) mit einer Matrix* A *transformieren nach* $\Delta^2\tilde{u} = \tilde{f}$ *?*

Literaturverzeichnis

[1] G. van Dijk, Distribution theory. Convolution, Fourier transform, and Laplace transform. De Gruyter Graduate Lectures. De Gruyter, Berlin, 2013.

[2] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, Distributions. Theory and applications. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.

[3] F.G. Friedlander, Introduction to the theory of distributions. Second edition. With additional material by M. Joshi. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] Laurent Schwartz, Théorie des distributions. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris 1966.

[5] Wolfgang Walter, Einführung in die Theorie der Distributionen. Third edition. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994.

Index